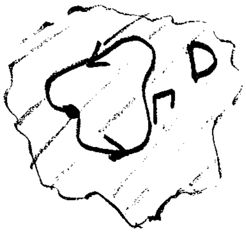
Definition 47. Ett öppet och sammanhängande område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhängande om området innanför varje enkel och sluten kurva Γ i D är en delmängd av D.



D enkelt sammanhängande

D ej enkelt sammanhängande

Sats 69. Låt fältet $\bar{F} = (P, Q)$ vara kontinuerligt och antag att P'_y och Q'_x är kontinuerliga i ett enkelt sammanhängande område D. Om P och Q uppfyller villkoret (54),

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

i området D, så är fältet (P, Q) konservativt.

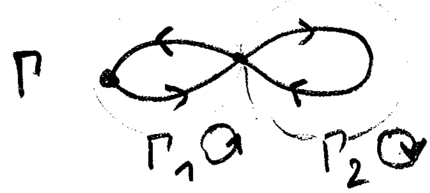
Anmärkning: I Exempel 119 b) är $D = \mathbb{R}^2$ ett enkelt sammanhängande område, så $Q'_x = 2x+7 = P'_y$ i $\mathbb{R}^2$ garanterar att (P, Q) är konservativt i $\mathbb{R}^2$.

Bevisskiss: (Sats 69). Enligt Sats 67 b) behöver vi visa att $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = 0$ längs alla slutna kurvor Γ i D. Om Γ är enkel omsluter den ett område Ω i D på vilket vi kan tillämpa Greens formel:

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \pm \iint_\Omega (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \pm \iint_\Omega 0\,dx\,dy = 0,$$

om Γ negativt orienterad

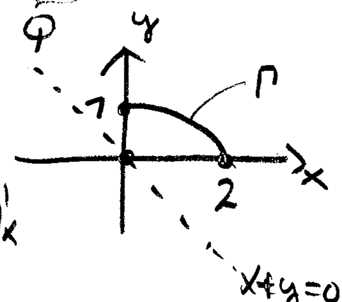
Detta medför att kurvintegralen längs en godtycklig sluten kurva Γ är noll (visas ej). Exempelvis kan vissa slutna kurvor delas upp i enkla slutna kurvor:



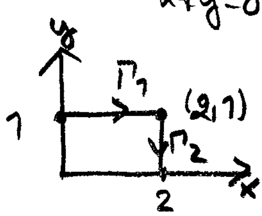
$$\oint_\Gamma = \oint_{\Gamma_1} + \oint_{\Gamma_2}$$

Γ_1, Γ_2 enkla, slutna kurvor.

Exempel 120. Beräkna $\int_\Gamma \underbrace{\left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right)}_{P} dx + \underbrace{\frac{x}{x+y}}_{Q} dy$, där Γ genomlöper ellipsen $x^2+4y^2=4$ från $(0,1)$ till $(2,0)$.



Lösning: Välj $D = \{(x,y) : x+y > 0\}$.
D enkelt sammanhängande öppet område, P, Q, P'_y, Q'_x kontinuerliga i D. $Q'_x = \frac{y}{(x+y)^2} = P'_y$ i D.
Sats 69: (P,Q) konservativt i D. Väljer ny väg:



$$\int_\Gamma \overset{*}{=} \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \int_0^2 \left(\ln(t+1) + \frac{t}{t+1}\right)\cdot 1 \cdot dt + \int_1^0 \frac{2}{2+t}\cdot 1\cdot dt$$

$$= \dots = \left[t\ln(t+1)\right]_0^2 + \left[2\ln(2+t)\right]_1^0 = \underline{\underline{2\ln 2}}.$$

Parameterframställning och areor av ytor i $\mathbb{R}^3$

För att parameterframställa en rymdkurva räcker det med en parameter t och en avbildning $\bar{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$. Parameterframställning av en yta i $\mathbb{R}^3$ kräver två parametrar u och v och en avbildning $\bar{r}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D,$$

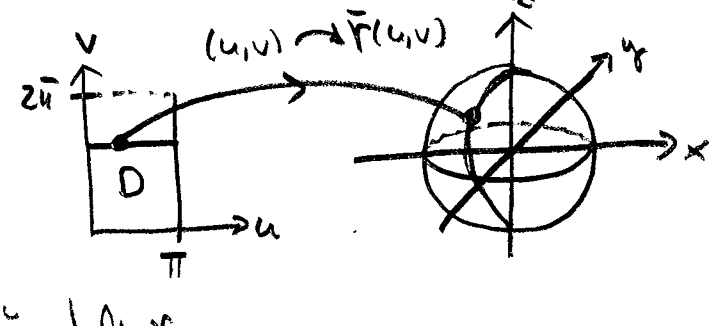
där D är ett "område" i $\mathbb{R}^2$.

Definition 42. Ett <u>öppet område</u> D i $\mathbb{R}^2$ är en <u>öppen</u> och <u>sammanhängande</u> <u>punktmängd</u>. Om A är ett öppet område kallas en mängd $D = A \cup B$, $B \subset \partial A$, ett <u>område</u> och $D = A \cup \partial A$ ett <u>slutet område</u>.

Exempel 121. Avbildningen

$$\begin{cases} x(u,v) = \sin u \cos v \\ y(u,v) = \sin u \sin v \\ z(u,v) = \cos u \end{cases}$$

avbildar rektangeln $D = \{(u,v) : 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v < 2\pi\}$ på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



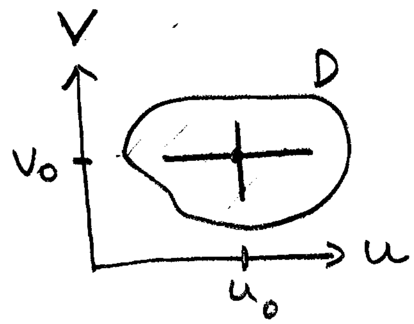
Rektangelsidorna $u = 0$ och $u = \pi$ avbildas på polerna $(0,0,1)$ resp. $(0,0,-1)$.

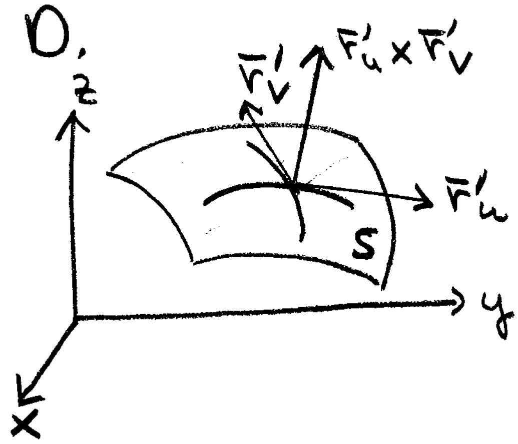
I övrigt är avbildningen omvändbar.

Antag att avbildningen $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, med komponenterna

$$(55) \quad \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \qquad (u,v) \in D, \end{cases}$$

är kontinuerligt deriverbar, dvs. partiella derivatorna av x, y och z med avseende på u och v är kontinuerliga i D.





Om $v = v_0 =$ konst. och u varierar, beskriver $\bar{r}(u,v_0) = (x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0))$ en kurva på S med tangentvektorn $\bar{r}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$.
Om $u = u_0 =$ konst. och v varierar, beskriver $\bar{r}(u_0,v) = (x(u_0,v), y(u_0,v), z(u_0,v))$ en kurva på S med tangentvektorn $\bar{r}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$.
Antag att $\bar{r}'_u \neq \bar{0}$ och $\bar{r}'_v \neq \bar{0}$. Om $(u,v) = (u(\tau), v(\tau))$ är en reguljär kurva i D med $(u(\tau_0), v(\tau_0)) = (u_0, v_0)$, så avbildas den på kurvan $\bar{r}(\tau) = \bar{r}(u(\tau), v(\tau))$ på S, med tangentvektorn, (för $\tau = \tau_0$)

$$(56) \quad \bar{r}'(\tau_0) = \bar{r}'_u(u_0,v_0) \cdot u'(\tau_0) + \bar{r}'_v(u_0,v_0) \cdot v'(\tau_0),$$

som är en linjärkombination av $\bar{r}'_u$ och $\bar{r}'_v$.

Om $\bar{r}'_u$ och $\bar{r}'_v$ är linjärt oberoende spänner de upp ett plan i vilket alla tangentvektorer ligger, tangentplanet till S i punkten $r(u_0,v_0)$. Då har vi att $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \neq \bar{0}$ och $\bar{r}(u_0,v_0)$ är en regulär punkt. Tangentplanets ekvation:

$$\big((x,y,z) - \bar{r}(u_0,v_0)\big) \bullet \big(\bar{r}'_u(u_0,v_0) \times \bar{r}'_v(u_0,v_0)\big) = 0,$$

där normalvektorn $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v$ i punkten $\bar{r}(u_0,v_0)$ är:

$$(57)\quad \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} e_1 & x'_u & x'_v \\ e_2 & y'_u & y'_v \\ e_3 & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = \left(\frac{d(y,z)}{d(u,v)}, \frac{d(z,x)}{d(u,v)}, \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right)\Bigg|_{(u_0,v_0)}$$

Därmed blir tangentplanets ekvation:

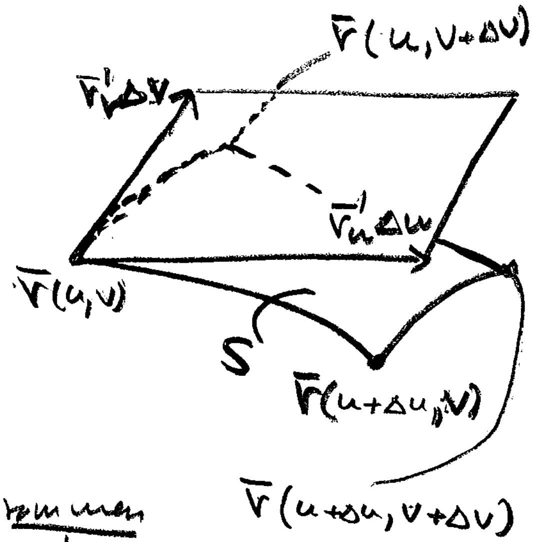
$$(58)\quad (x-x_0)\frac{d(y,z)}{d(u,v)} + (y-y_0)\frac{d(z,x)}{d(u,v)} + (z-z_0)\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = 0.$$

Planet tangerar ytan S i $(x_0,y_0,z_0) = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$.
Om $\bar{r}'_u$ och $\bar{r}'_v$ är linjärt beroende är $\bar{r}(u_0,v_0)$ en singulär punkt och $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \bar{0}$. Vi har att $\bar{r}(u_0,v_0)$ är en singulär punkt om och endast om

$$(59)\quad \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \bar{0}.$$

Ett lämpligt regularitetsantagande är då att $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \neq \bar{0}$.

Vi skall nu resonera oss fram till en formel för beräkning av arean hos en buktig yta. Låt $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, vara en parameterframställning av ytan S i $\mathbb{R}^3$.



Tangentplanet till S i punkten $\bar{r}(u,v)$ spänns upp av $\bar{r}'_v$ och $\bar{r}'_u$. Vi approximerar ytavsnittet som begränsas av parameterkurvorna mellan $\bar{r}(u,v)$, $\bar{r}(u,v+\Delta v)$, $\bar{r}(u+\Delta u, v+\Delta v)$ och $\bar{r}(u+\Delta u, v)$ med parallellogrammen som spänns upp av $\bar{r}'_u\Delta u$ och $\bar{r}'_v\Delta v$.

Den geometriska tolkningen av vektorprodukt, sida 8, ger att parallellogrammens area är

$$|(\bar{r}'_u\Delta u) \times (\bar{r}'_v\Delta v)| = |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\,\Delta u \Delta v$$

Vi kan då betrakta $dS = |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\,du\,dv$ som ett areaelement på S och definierar:

Definition 43. Om ytan S har en kontinuerligt deriverbar parameterframställning $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, så definieras arean av S genom:

$$(60) \quad A = \iint_D |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\,du\,dv.$$

Ofta används symbolen $\iint_S dS$ som beteckning för (60). (Jämför med skrivsättet $\int_\Gamma ds = \int_\alpha^\beta |\bar{r}'(t)|\,dt$ för båglängd hos Γ).

Exempel 122. Vi beräknar arean av sfären $x^2+y^2+z^2=1$ med parameterframställningen:

$$\begin{cases} x(u,v) = \sin u \cos v, \\ y(u,v) = \sin u \sin v, \\ z(u,v) = \cos u, \end{cases} \qquad D = \{(u,v) : 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v < 2\pi\}$$

(jämför Ex. 121).

Vi utför kalkylerna:

$$\begin{cases} \bar{r}'_u = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u) \\ \bar{r}'_v = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0) \end{cases}$$

$$|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| \overset{(57)}{=} \left|\left(\frac{d(y,z)}{d(u,v)}, \frac{d(z,x)}{d(u,v)}, \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right)\right| = \ldots \text{ (kolla!)}$$

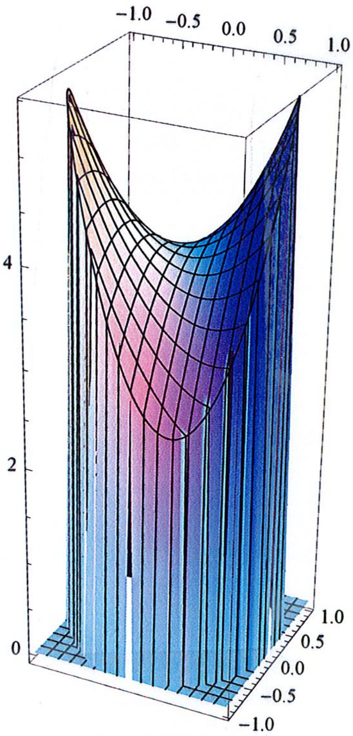
$$= |(\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \sin u \cos u)| = \underline{\sin u},$$

$$\underline{\underline{A}} = \iint_D |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\, du\, dv = \iint_D \sin u \, du\, dv = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sin u \, dv \right) du = \underline{\underline{4\pi}}.$$

Ett viktigt specialfall är när ytan S är en funktionsyta $z = f(x,y)$ över D. Den kan då parameterframställas: $x = x$, $y = y$, $z = f(x,y)$, med x och y som parametrar och $\bar{r}'_x = (1, 0, f'_x)$, samt $\bar{r}'_y = (0, 1, f'_y)$, $\bar{r}'_x \times \bar{r}'_y = (-f'_x, -f'_y, 1)$. Därmed reduceras formel (60) till

$$(61) \quad A = \iint_D \sqrt{1 + f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2}\, dx\, dy.$$

(Jämför med båglängdsformeln för $y = f(x)$).



Exempel 123. Beräkna arean av ytan $z = x^2+2xy-y^2+4$ över enhetscirkelskivan $x^2+y^2 \le 1$.

Lösning: $f'_x = 2x+2y$, $f'_y = 2x-2y$.

Formel 67 ger:

$$\underline{\underline{A}} = \iint_D \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{1+8x^2+8y^2}\,dx\,dy$$

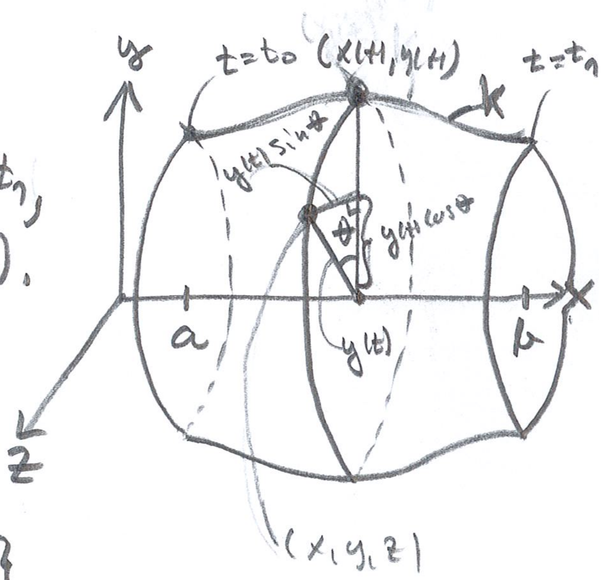
Polära koordinater

$$= \iint_{D'} \sqrt{8r^2+1}\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1+8r^2}\cdot r\,d\theta \right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1+8r^2)^{1/2}\cdot r\,dr = 2\pi \left[\frac{1}{24}(1+8r^2)^{3/2} \right]_0^1$$

$$= \underline{\underline{\frac{13}{6}\pi}} \quad (\approx 6,8)$$

Betrakta en kurva K med parameterframställning: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t: t_0 \to t_1$, i xy-planet. (kan anta att $y(t) \ge 0$).



Rotationsytan då kurvan roterar kring x-axeln ges då av

$$\begin{cases} \bar{r}(t,\theta) = (x(t),\, y(t)\cos\theta,\, y(t)\sin\theta), \\ D = \{(t,\theta) : t_0 \le t \le t_1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\} \end{cases}$$

$$\bar{r}'_t \times \bar{r}'_\theta = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & x'(t) & 0 \\ \bar{e}_2 & y'(t)\cos\theta & -y(t)\sin\theta \\ \bar{e}_3 & y'(t)\sin\theta & y(t)\cos\theta \end{vmatrix} = (y'(t)y(t),\, -x'(t)y(t)\cos\theta,\, -x'(t)y(t)\sin\theta)$$

$$\underline{\underline{|\bar{r}'_t \times \bar{r}'_\theta|}} = \sqrt{(y'(t)y(t))^2 + (x'(t)y(t))^2} = \underline{\underline{y(t)\sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2}}}$$

Då ger formel (60) arean för rotationsytan:

$$(62)\quad \underline{\underline{A}} = \iint_D |\bar{r}'_t \times \bar{r}'_\theta|\, dt\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2}\, dt \right) d\theta$$

$$= \underline{\underline{2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2}\, dt}}\,.$$

Speciellt om K är en funktionskurva $\begin{cases} y = y(x) \\ x = x, \end{cases}$ $x \in [a, b]$, erhålls formeln

$$(62')\quad A = 2\pi \int_a^b y(x)\cdot\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx\,.$$

Exempel 124. Låt paraboelbågen $y = x^2$, $0 \le x \le \sqrt{2}$, rotera kring y-axeln. Beräkna arean av rotationsytan.

Lösning: $y = x^2$, $0 \le x \le \sqrt{2} \iff x = \sqrt{y}$, $0 \le y \le 2$.

Därmed ger formel (62') att den eftersökta rotationsarean är

$$\underline{\underline{A}} = 2\pi \int_0^2 x(y)\sqrt{1 + x'(y)^2}\, dy = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y}\cdot\sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy$$

$$= \pi \cdot \int_0^2 \sqrt{4y+1}\, dy = \pi \left[\frac{1}{6}(4y+1)^{3/2} \right]_0^2$$

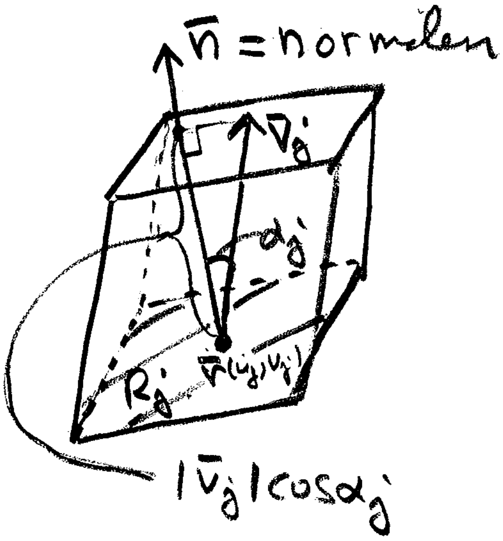
$$= \frac{\pi}{6}\left(9^{3/2} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{13}{3}\pi}}\,. \quad (\approx 13{,}6)$$

Ytintegraler

Låt S vara en parameterframställd yta, med vätskegenomströmning. Vätskans hastighet $\bar{V}(\bar{r}(u,v))$ varierar till storlek och riktning med punkten $\bar{r}(u,v)$ på ytan. Vi vill beräkna den vätskemängd som per tidsenhet passerar genom ytan.

Ytan S uppdelas i N små delar som vi approximerar med parallellogrammer R_j, $j=1,\dots,N$, med areor ΔS_j och vätskans hastighet genom R_j är approximativt konstant $\bar{V}_j = \bar{V}(\bar{r}(u_j,v_j))$, där $\bar{r}(u_j,v_j)$ är en punkt i R_j.

Vätskemängden per tidsenhet som strömmar genom R_j bildar en parallellepiped med basytan ΔS_j och kantlängd $|\bar{V}_j|$. Höjden är då $|\bar{V}_j|\cdot\cos\alpha_j$.



Volymen $= |\bar{V}_j|\cos\alpha_j\cdot\Delta S_j$.

Totala vätskemängden fås som

$$\sum_{j=1}^{N} |\bar{V}_j|\cos\alpha_j\,\Delta S_j.$$

Enligt sida 247 är $\Delta S_j \approx \underbrace{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}_{\bar{n}}\, m(D_j)$, där D_j är motsvarande område i uv-planet.

Därmed kan den totala vätskemängden per tidsenhet (approximativt) uttryckas som

$$\sum_{j=1}^{N} |\overline{v}_j| \cos\alpha_j \, |\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| \, m(D_j) = \sum_{j=1}^{N} \overline{V}_j \bullet (\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v) \, m(D_j),$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left[\overline{V}(\overline{r}(u_j, v_j)) \bullet (\overline{r}'_u(u_j, v_j) \times \overline{r}'_v(u_j, v_j)) \right] m(D_j),$$

vilket är en Riemannsumma till dubbelintegralen:

$$I = \iint_D \left[\overline{V}(\overline{r}(u,v)) \bullet (\overline{r}'_u(u,v) \times \overline{r}'_v(u,v)) \right] du\,dv.$$

Definition 44. Antag att $\overline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är kontinuerlig och att en yta S i $\overline{F}$:s definitionsmängd är given genom parameterframställningen $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, med $\overline{r}'_u$ och $\overline{r}'_v$ kontinuerliga, (utom eventuellt på en nollmängd $D' \subset D$).

Dubbelintegralen

(63) $$\iint_D \{ \overline{F}(\overline{r}(u,v)) \bullet [\overline{r}'_u(u,v) \times \overline{r}'_v(u,v)] \} \, du\,dv$$

kallas ytintegralen av vektorfältet $\overline{F}$ över ytan S i normalriktningen $\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v$ och betecknas $\iint_S \overline{F} \bullet dS$.

Om vi betecknar $\bar{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ och $\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ kan integranden i (63), med stöd av sida 7, (formeln för $\bar{u} \cdot (\bar{x} \times \bar{y})$), skrivas som

$$\begin{vmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = P \frac{d(y,z)}{d(u,v)} + Q \frac{d(z,x)}{d(u,v)} + R \frac{d(x,y)}{d(u,v)},$$

Varför (63) kan skrivas:

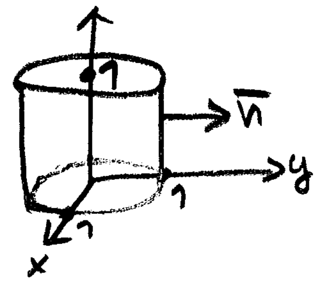
$$(63') \quad \iint_D \left\{ P(\bar{r}(u,v)) \frac{d(y,z)}{d(u,v)} + Q(\bar{r}(u,v)) \frac{d(z,x)}{d(u,v)} + R(\bar{r}(u,v)) \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right\} du\,dv,$$

och betecknas kortare:

$$(63'') \quad \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Exempel 125. Beräkna $I = \iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, där S är mantelytan av en cylinder med normalriktning utåt, då $D = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1\}$.

Lösning: $\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v, \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{d(y,z)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u \\ \dfrac{d(z,x)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u \\ \dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$



$$\therefore \underline{\underline{I}} \overset{(63')}{=} \iint_D \{\cos u(\cos u) + \sin u(-\sin u) + v \cdot 0\}\,du\,dv$$
$$= \iint_D 1 \cdot du\,dv = \underline{\underline{2\pi}}.$$

$\left(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} e_1 & -\sin u & 0 \\ e_2 & \cos u & 0 \\ e_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0) \right.$

$r(0,0) = (1,0,0)$

$\left. (\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)(0,0) = (1,0,0) \quad \text{Normalriktning } \underline{\text{utåt}}\,! \right)$

Observera att ordningsföljden på differentialerna i en ytintegral inte är godtycklig, exempelvis:

$$dydz = \frac{d(y,z)}{d(u,v)}dudv = -\frac{d(z,y)}{d(u,v)}dudv = -dzdy.$$

Om vi med $-S$ betecknar ytstycket S med normalriktningen $\bar{r}'_v \times \bar{r}'_u = -\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v$ gäller:

$$(64)\quad \boxed{\iint_{-S} \bar{F}\cdot dS} = \iint_{D} \bar{F}\cdot(\bar{r}'_v\times\bar{r}'_u)\,dudv = -\iint_{D}\bar{F}\cdot(\bar{r}'_u\times\bar{r}'_v)\,dudv$$

$$\boxed{= -\iint_{S}\bar{F}\cdot dS\,.}$$

Fysikalisk tolkning: Om vätskan i inledande exemplet strömmer genom ytan åt ena hållet, räknas "flödet" åt andra hållet som negativt.

Anmärkning: Vi betraktar endast orienterbara (tvåsidiga) ytor, för vilka man kan skilja mellan ytans båda sidor och motsvarande normalriktningar.

Möbius' band: Fås genom att ta en lång smal rektangulär pappersremsa och klistra ihop dess båda ändar efter vridning ett halvt varv. Då övergår ursprungliga remsans över- och undersidan kontinuerligt i varandra och bandet har bara en sida. Detta är en icke-orienterbar yta.

Ytintegralen är oberoende av ytans parameterframställning, bara man ser till att ordningsföljden på parametrarna är sådan att ytans orientering inte ligts.

Antag att vi går över till nya parametrar u', v' genom avbildningen

$$\begin{cases} u = u(u', v'), \\ v = v(u', v'), \end{cases}$$

och antag att avbildningen har kontinuerliga partiella derivator av första ordningen, samt att D' avbildas bijektivt på D. Då ger variabelsubstitution i dubbelintegral och Sats 27 för funktionaldeterminanten av en sammansättning att:

$$\iint_{-S} \bar{F} \circ dS = \iint_D \left\{ P(\bar{r}(u,v)) \frac{d(y,z)}{d(u,v)} + Q(\bar{r}(u,v)) \frac{d(z,x)}{d(u,v)} + R(\bar{r}(u,v)) \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right\} du\,dv$$

$$= \iint_{D'} \left\{ \left(P \cdot \frac{d(y,z)}{d(u,v)} + Q \cdot \frac{d(z,x)}{d(u,v)} + R \cdot \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right) \cdot \left| \frac{d(u,v)}{d(u',v')} \right| \cdot du'\,dv' \right.$$

$$= \underline{\pm} \iint_{D'} \left\{ P \cdot \frac{d(y,z)}{d(u',v')} + Q \frac{d(z,x)}{d(u',v')} + R \cdot \frac{d(x,y)}{d(u',v')} \right\} \cdot du'\,dv',$$

där tecknet i sista ledet beror på om normalriktningarna $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v$ och $\bar{r}'_{u'} \times \bar{r}'_{v'}$ överensstämmer eller inte. Om

$$\frac{d(u,v)}{d(u',v')} > 0$$

bibehölls ytans orientering vid parameterbytet.

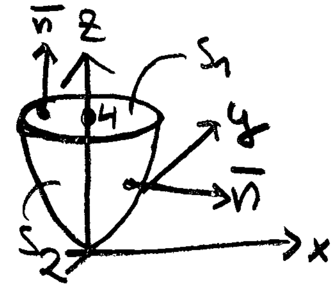
Om ytan S delas i två delar S_1 och S_2 genom att området D delas i två delområden D_1 och D_2 så att $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$, $(u,v)\in D_1$ och $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$, $(u,v)\in D_2$, blir parameterframställningar av S_1 respektive S_2 så gäller:

$$(65)\quad \iint_S \bar{F}\cdot dS = \iint_{S_1}\bar{F}\cdot dS + \iint_{S_2}\bar{F}\cdot dS,$$

eftersom $\iint_D \{\bar{F}(\bar{r}(u,v))\cdot(\bar{r}'_u(u,v)\times \bar{r}'_v(u,v))\}\,du\,dv$ kan delas upp i summan av dubbelintegralerna över D_1 och D_2. Formel (65) gäller för uppdelning av D i ett ändligt antal områden.

Exempel 126. Beräkna flödet ut ur området $K: x^2+y^2\le z\le 4$ för fältet $\bar{F}=(x,y,3)$.

Lösning:



$1^\circ)$ $S_1: \begin{cases} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=4 \end{cases}$, $D_1: \begin{cases} 0\le r\le 2,\\ 0\le\theta<2\pi \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{d(y,z)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \dfrac{d(z,x)}{d(r,\theta)} = 0 \\ \dfrac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \end{cases}$$

$$\bar{r}'_r\times\bar{r}'_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & \cos\theta & -r\sin\theta \\ e_2 & \sin\theta & r\cos\theta \\ e_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r) \text{ riktad utåt},$$

Flödet genom S_1 ges av:

$$\underline{\underline{I_1}} = \iint_{S_1} x\,dydz + y\,dzdx + 3\,dxdy = 3\iint_{S_1} dxdy = 3\iint_{D_1}\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}\,dr\,d\theta = 3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 r\,dr\right)d\theta$$
$$= 3\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = \underline{\underline{12\pi}}.$$

2^{0}) $S_2 : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r^2 \end{cases}$ $\qquad D_2 : \begin{cases} 0 < r \leq 2 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{d(y,z)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ 2r & 0 \end{vmatrix} = -2r^2\cos\theta \\ \dfrac{d(z,x)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 2r & 0 \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -2r^2\sin\theta \\ \dfrac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r \end{cases}$$

$\overline{r}'_r \times \overline{r}'_\theta = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r)$ riktad inåt!

Då kan flödet I_2 genom S_2 beräknas med (64):

$$\underline{\underline{I_2}} = \iint_{S_2} = -\iint_{-S_2} = -\iint_{D_2} \{r\cos\theta\cdot(-2r^2\cos\theta) + r\sin\theta(-2r^2\sin\theta) + 3\cdot r\}\,dr\,d\theta$$

$$= \iint_{D_2} (2r^3 - 3r)\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^2 (2r^3-3r)\,dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{2} - \frac{3}{2}r^2\right]_0^2$$

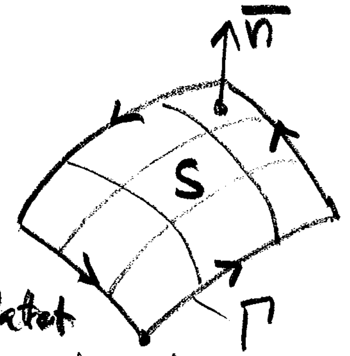
$$= \underline{\underline{4\pi}}.$$

Totala flödet ut ur K genom $S = S_1 \cup S_2$ ges då med stöd av formel (65) av:

$$\underline{\underline{\iint_S F\cdot dS}} = \iint_{S_1} F\cdot dS + \iint_{S_2} F\cdot dS = 12\pi + 4\pi = \underline{\underline{16\pi}},$$

Stokes sats

Stokes sats anger ett samband mellan kurvintegralen över en sluten randkurva Γ och ytintegralen över en yta S med Γ som positivt orienterad rand.



Att Γ är en positivt orienterad randkurva till S betyder att från spetsen av normalvektorn $\bar{n}$ betraktat genomlöps Γ så att S ligger till vänster om Γ. (Om S ligger till höger om Γ är randen negativt orienterad).

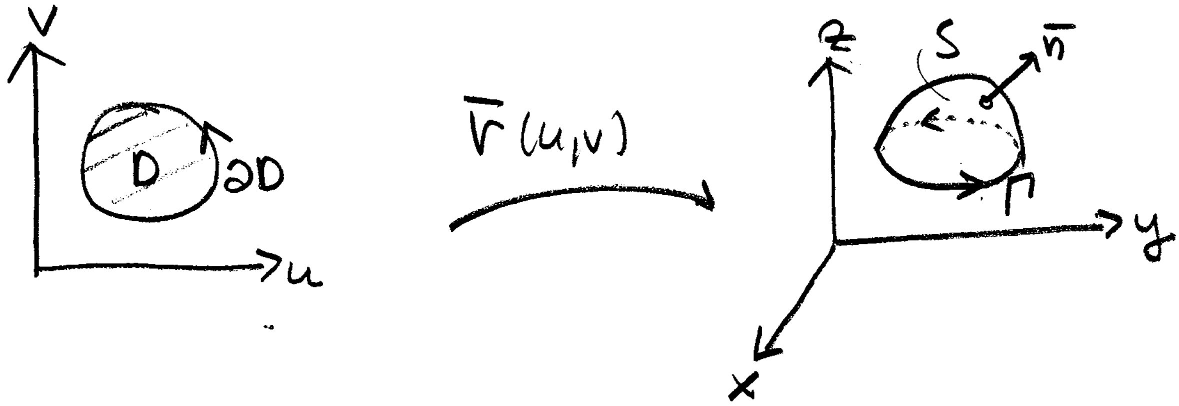
Definition 45. För ett vektorfält $\bar{F} = (P, Q, R)$ definieras rotationen $\operatorname{rot} \bar{F}$ som vektorfältet:

$$(66) \quad \operatorname{rot} \bar{F} := \begin{vmatrix} e_1 & \frac{\partial}{\partial x} & P \\ e_2 & \frac{\partial}{\partial y} & Q \\ e_3 & \frac{\partial}{\partial z} & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Rotationen kan uppfattas som en vektorprodukt av operatorn ∇ och $\bar{F}$:

$$\nabla \times \bar{F} = \operatorname{rot} \bar{F}.$$

Antag att ytan S har parameterframställning $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, att ∂D kan parameter-framställas $(u,v) = (u(t), v(t))$, $t \in [a,b]$.



Låt Γ har parameterframställning $\bar{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t: a \to b$. $\left(\bar{r}(u(t), v(t)) = \bar{x}(t) \right)$.

<u>Sats 70</u>. Antag att $\bar{F} = (P, Q, R)$ är <u>kontinuerligt deriverbar</u>, att $\bar{r}(u,v)$ har <u>kontinuerliga partiella derivator av andra ordning</u>, och att <u>Greens formel kan användas på D och ∂D</u>.

<u>Då gäller</u>: (Stokes sats)

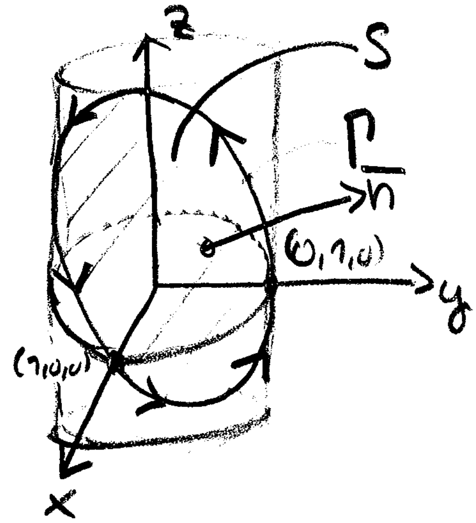
$$(67) \quad \int_{\Gamma} \bar{F}(\bar{x}) \cdot d\bar{x} = \iint_{S} \operatorname{rot} \bar{F} \cdot dS = \iint_{S} (\nabla \times \bar{F}) \cdot dS.$$

I <u>komponentform</u>:

$$(67') \quad \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{S} (R'_y - Q'_z)\,dy\,dz + (P'_z - R'_x)\,dz\,dx + (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy.$$

I två dimensioner $(R = 0,\ dz = 0)$ reduceras (67) till <u>Greens formel</u>.

Exempel 127. Använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma -y^3dx + x^3dy - z^3dz$ där Γ är snittet av cylindern $x^2+y^2=1$ och planet $x+y+z=1$, och Γ genomlöps moturs.



Lösning: Ytan S definieras genom $z=1-x-y$ för $x^2+y^2\le 1$. Parametrisering:

$$\begin{cases} x(u,v)=u \\ y(u,v)=v \\ z(u,v)=1-u-v, \end{cases}$$

$(u,v)\in D=\{(u,v): u^2+v^2\le 1\}$

$$\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1),\ \Gamma \text{ positivt orienterad}.$$

$$\bar{F}=(-y^3, x^3, -z^3)=(P,Q,R),\quad \begin{cases} R'_y - Q'_z = 0 \\ P'_z - R'_x = 0 \\ Q'_x - P'_y = 3x^2+3y^2 \end{cases}$$

D8 ger formel (67') att:

$$\int_\Gamma -y^3dx + x^3dy - z^3dz = \iint_S (3x^2+3y^2)\,dx\,dy$$

$$= \left[\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \right] = \iint_D (3u^2+3v^2)\cdot 1\cdot du\,dv$$

Polära koordinater

$$= 3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2\cdot r\cdot dr\right)d\theta = 3\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}}.$$

Gauss' sats

Greens formel i planet har ytterligare en motsvarighet i $\mathbb{R}^3$. Låt D vara en kropp i $\mathbb{R}^3$ med en sluten begränsningsyta ∂D. Ytintegralen av $\bar{F} = (P, Q, R)$ över ∂D kan beräknas med en trippelintegral.

Definition 46. Divergensen för $\bar{F} = (P, Q, R)$ definieras genom

(68) $\operatorname{div} \bar{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$.

Sats 77. (Gauss' sats). Låt $\bar{F} = (P, Q, R)$ ha kontinuerliga derivator i kroppen $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Låt ∂D vara en sluten och styckvis reguljär randyta till D. Då gäller:

(69) $$\iint_{\partial D} \bar{F} \cdot dS = \iiint_D \operatorname{div} \bar{F} \, dx\,dy\,dz.$$

I komponentform:

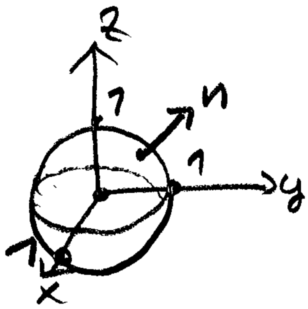
(69') $$\iint_{\partial D} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_D (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dx\,dy\,dz.$$

Exempel 128. Beräkna $\iint_S (4x+y)\,dydz + (2x+5z)\,dxdy$,

där S är enhetssfären med utåtriktad normal.

Lösning: $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

$\partial D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$



$\overline{F} = (P, Q, R) = (4x+y,\ 0,\ 2x+5z)$

$P'_x = 4,\ Q'_y = 0,\ R'_z = 5$

DS ger (6g'):

$$\iint_S (4x+y)\,dydz + (2x+5z)\,dxdy = \iiint_D (4+0+5)\,dxdydz$$

$$= 9 \cdot \iiint_D 1 \cdot dxdydz = 9 \cdot V(D) = 9 \cdot \frac{4\pi}{3} = 12\pi.$$

Föreläsningsanteckningarna är sammanställda huvudsakligen ur följande böcker:

[1] Petermann, E: Analytiska metoder II, Studentlitteratur, 2002

[2] Eriksson, F: Flerdimensionell analys, Studentlitteratur, 1976

[3] Persson, A. och Böiers, L-C: Analys i flera variabler, Studentlitteratur, 1988

[4] Månsson, J och Nordbeck, P: Flerdimensionell analys, Studentlitteratur, 2013