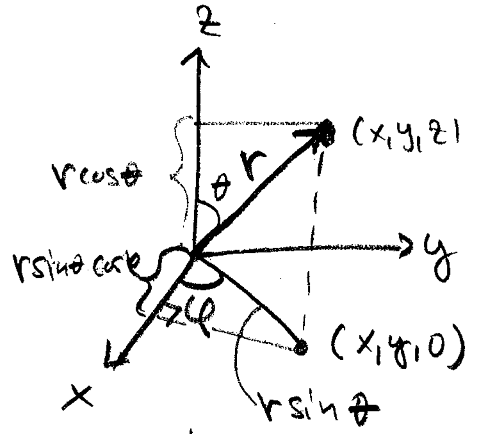
Exempel 110. En viktig variabelsubstitution i $\mathbb{R}^3$ är övergången till sfäriska (rymdpolära) koordinater:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r > 0, \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 \le \varphi < 2\pi. \end{cases}$$



ger omvändbar avbildning på $\mathbb{R}^3 \setminus$ z-axeln.

$$\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta \text{ , se Exempel 56 b).}$$

Vi beräknar $\iiint_S z^2\,dx\,dy\,dz$, där S är enhetsklotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Lösning: Om $D = S \setminus$ z-axeln så är integralerna över S och D lika. (z-axeln nollmängd). $D' = \{(r,\theta,\varphi) : 0 < r \le 1,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$ avbildas omvändbart på D.

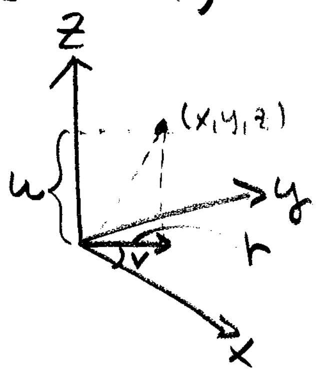
$$\iiint_S z^2\,dx\,dy\,dz = \iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz \overset{(39)}{=} \iiint_{D'} r^2\cos^2\theta\, r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} r^4\cos^2\theta\sin\theta\,d\varphi\right)d\theta\right)dr$$

$$= 2\pi\underbrace{\left(\int_0^1 r^4\,dr\right)}_{\frac{1}{5}}\left(\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\right) = \frac{2\pi}{5}\underbrace{\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}}_{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{4\pi}{15}.$$

Exempel 111. Övergång till cylindriska koordinater:
(Exempelvis vid rotationssymmetri kring z-axeln)



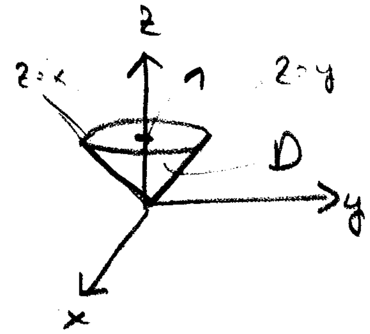
$$\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \\ z = u \end{cases} \qquad \begin{cases} r > 0 \\ 0 \le v < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

ger omvändbar avbildning på $\mathbb{R}^3 \setminus z$-axeln.

$$\frac{d(x,y,z)}{d(r,v,u)} = r, \quad \text{se exempel 6, demo 5.}$$

Exempel 109, $I = \iiint_D z\,dxdydz$ över

$D = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z,\ 0 \le z \le 1\}$



Kan lösas med cylindriska koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \\ z = u \end{cases} \qquad \begin{aligned} &0 \le u \le 1 \\ &0 \le v < 2\pi \\ &0 < r \le u \end{aligned}$$

Då ger formel (79):

$$\underline{\underline{\iiint_D z\,dxdydz}} = \iiint_{\substack{0 < r \le u \\ 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v < 2\pi}} u r\,drdvdu = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 u\Big(\underbrace{\int_0^u r\,dr}_{\frac{u^2}{2}}\Big)du\right)dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 u\cdot\frac{u^2}{2}\,du\right)dv = \left(\int_0^{2\pi} 1\,dv\right)\left(\int_0^1 \frac{u^3}{2}\,du\right)$$

$$= 2\pi\cdot\left[\frac{u^4}{8}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

Tabellerade tillämpningar av dubbel- och trippelintegraler

Area och volym:

Arean av en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kan beräknas med dubbelintegralen:

(40) $$A(D) = \iint_D 1 \cdot dx\,dy.$$

Volymen av en begränsad och mätbar mängd $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kan beräknas med trippelintegralen:

(41) $$V(K) = \iiint_K 1 \cdot dx\,dy\,dz.$$

Massa och tyngdpunkt

Massan av en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ med ytdensitet $\rho(x,y)$, (kg/m^2), ges av:

(43) $$M(D) = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy,$$

och tyngdpunkten $T = (x_T, y_T)$ av

(44) $$\begin{cases} x_T = \dfrac{1}{M(D)} \iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy, \\ y_T = \dfrac{1}{M(D)} \iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy. \end{cases}$$

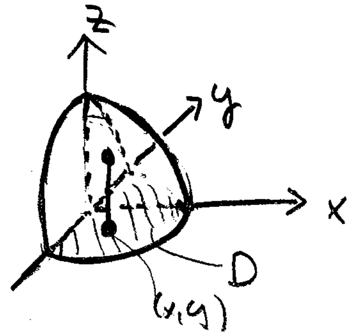
Massan av en begränsad och mätbar mängd $K \subseteq \mathbb{R}^3$ med volymdensitet $\rho(x,y,z)$, (kg/m³), ges av

$$(45)\quad M(K) = \iiint_K \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

och tyngdpunkten $T = (x_T, y_T, z_T)$ av

$$(46)\quad \begin{cases} x_T = \dfrac{1}{M(K)} \iiint_K x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \\ y_T = \dfrac{1}{M(K)} \iiint_K y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \\ z_T = \dfrac{1}{M(K)} \iiint_K z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

Exempel 112. Bestäm massan av kroppen K, $K = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1-(x^2+y^2),\ x \ge 0\}$, med densiteten $\rho(x,y,z) = 2-x$.



D halvcirkelskivan $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$.

$$M(K) \overset{(45)}{=} \iiint_K (2-x)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_D (2-x)\left(\int_0^{1-(x^2+y^2)} 1\cdot dz\right)dx\,dy = \iint_D (2-x)\,[z]_0^{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

polära koordinater

$$= \iint_D (2-x)(1-(x^2+y^2))\,dx\,dy = \iint_{D'} (2-r\cos\theta)(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 (2r-2r^3-(r^2-r^4)\cos\theta\,dr\right)d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[r^2 - \tfrac{1}{2}r^4 - (\tfrac{1}{3}r^3 - \tfrac{1}{5}r^5)\cos\theta\right]_0^1 d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{15}\cos\theta\right)d\theta$$

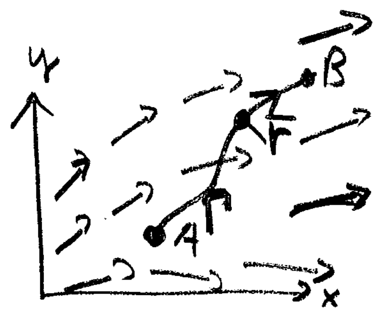
$$= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{2}{15}\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{15}}} \quad (\approx 1{,}3)$$

Integralkalkyl för vektorfält

Kurvintegraler

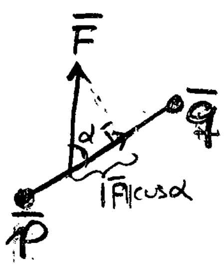
En funktion $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan tolkas som ~~ett~~ plant **kraftfält**, (gravitationsfält, elektriskt fält),

$$\bar{F}(\bar{r}) = (P(x,y), Q(x,y)),$$



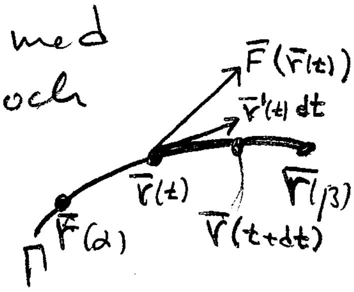
som i varje punkt $\bar{r}$ anger den kraft en enhetspartikel (enhetsmassa, enhetsladdning) påverkas av.

Om partikeln förflyttas längs kurvan Γ, från A till B, utförs ~~ett~~ arbete som kan beräknas med en kurvintegral.



Om förflyttningen sker raka vägen från p till q under en konstant kraft $\bar{F}$ fås arbetet som produkten av vägen $|\bar{q}-\bar{p}|$ och projektionen $|\bar{F}|\cos\alpha$ på rörelseriktningen. Arbetet blir då

$$A = |\bar{q}-\bar{p}||\bar{F}|\cos\alpha = \bar{F}\cdot(\bar{q}-\bar{p}).$$



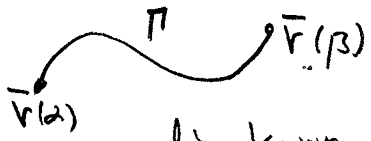
Om partikeln rör sig längs kurvan Γ med parameterframställning $\bar{r}=\bar{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, $t: \alpha \to \beta$ och påverkas av den variabla kraften $\bar{F}=\bar{F}(\bar{r})$, så kan en "liten" förflyttning från $\bar{r}(t)$ till $\bar{r}(t+dt)$ approximeras med den rätlinjiga förflyttningen $d\bar{r} = \bar{r}'(t)\,dt$ i tangentriktningen. Det av kraftfältet uträttade arbetet blir approximativt:

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t)\,dt,$$

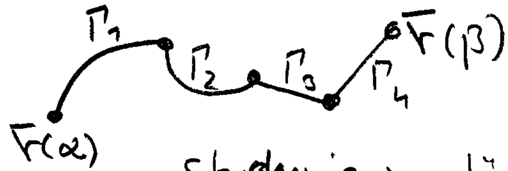
och hela arbetet längs Γ ges av:

$$\boxed{A = \int_\alpha^\beta \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t)\,dt}$$

Definition 38. En kurva Γ i $\mathbb{R}^2$ (eller $\mathbb{R}^3$) är <u>regulär</u> om den har en parameterframställning $\bar{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, $t: \alpha \to \beta$, sådan att $\underline{\bar{r}'(t) \neq 0}$ och $\bar{r}'(t)$ är <u>kontinuerlig</u> på $[\alpha, \beta]$. Kurvan är <u>styckevis regulär</u> om den är regulär förutom i ett <u>ändligt antal punkter</u> $t_1, \dots, t_n \in [\alpha, \beta]$.



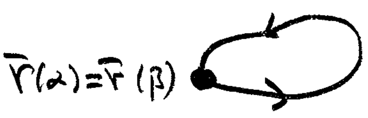
<u>regulär kurva</u>



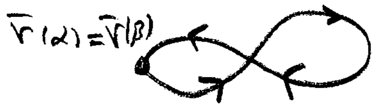
<u>styckevis regulär kurva</u>

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$$

Kurvan Γ är <u>sluten</u> om $\bar{r}(\alpha) = \bar{r}(\beta)$ och <u>enkel</u> om det <u>inte finns</u> $t_1, t_2 \in \,]\alpha, \beta[\, : t_1 \neq t_2$ och $\bar{r}(t_1) = \bar{r}(t_2)$.



<u>Sluten, enkel</u>



<u>Sluten, ej enkel</u>

Definition 39. Antag att $\bar{F}$ är en <u>kontinuerlig</u> funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ eller 3, och att $\Gamma \subseteq D_F$ är en <u>regulär kurva</u> med parameterframställning $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $a \le t \le b$, $t: a \to b$. Då existerar <u>kurvintegralen</u> av $\bar{F}$ längs kurvan Γ:

$$(47) \quad \int_\Gamma \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} := \int_a^b \left(\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\right) dt.$$

Om Γ är styckevis regulär, $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$, gäller:

$$\int_\Gamma \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}.$$

Anmärkningar: kurvintegraler kallas även linjeintegraler. Om komponenterna för $\bar{F}$ då $n=2$ är $P(x,y)$ och $Q(x,y)$ och för $\bar{r}(t)$: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ har vi $\bar{F}\cdot\bar{r}' = Px' + Qy'$, och formel (47) kan då omskrivas i differentialform:

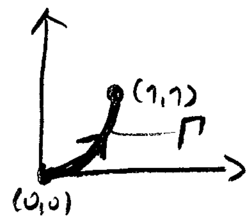
$$(47') \quad \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \left(P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t) \right) dt.$$

Då $n=3$ med $\bar{F} = (P,Q,R)$, $\bar{r} = (x,y,z)$ har vi

$$(47'') \quad \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \int_a^b \left[P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t) \right] dt$$

Exempel 113. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma xy\,dy$ där Γ är bågen från $(0,0)$ till $(1,1)$ av parabeln $y = x^2$.

Lösning: Γ kan exempelvis parameterframställas genom $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$, $0 \le t \le 1$, $t: 0 \to 1$.



Formel (47') ger:

$$\int_\Gamma xy\,dy = \int_0^1 t\cdot t^2 \cdot 2t\cdot dt = 2\int_0^1 t^4\,dt = 2\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Med parameterframställningen $\Gamma: \begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = t \end{cases}$, $0 \le t \le 1$, $t: 0 \to 1$

$$\int_\Gamma xy\,dy = \int_0^1 \sqrt{t}\cdot t \cdot 1 \cdot dt = \int_0^1 t^{3/2}\,dt = \frac{2}{5}\left[t^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Första framställningen reguljär den andra inte, ty $x'(0)$ existerar inte.

Kurvintegralen beror på genomloppsriktningen (orienteringen) av kurvan Γ.

Antag att $\Gamma: \bar{r} = \bar{r}(t)$, $a \le t \le b$, $t: a \to b$.
Med $-\Gamma$ avses samma kurva genomlöpt i motsatt riktning, $t: b \to a$. Då gäller:

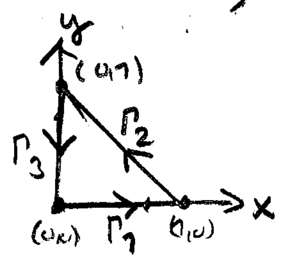
$$\int_{-\Gamma} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = \int_b^a \left(\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\right) dt = -\int_a^b \left(\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\right) dt$$

$$= -\int_{\Gamma} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r},$$

dvs. kurvintegralen byter tecken.

Däremot är kurvintegralen oberoende av parameterframställningen, så länge genomloppsriktningen bibehålls.

Exempel 114. Beräkna $\int_T y^3 dx - x^3 dy$ där T är omkretsen av triangeln med hörn $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$, genomlöpta i denna ordning.



$T = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$

Lösning: $\int_T = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3}$.

$$\int_{\Gamma_1} y^3 dx - x^3 dy = \begin{bmatrix} x(t)=t \\ y(t)=0 \\ t: 0 \to 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 (0 \cdot 1 - t^3 \cdot 0)\, dt = 0$$

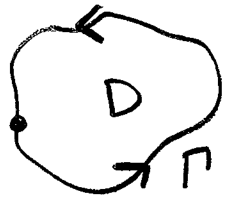
$$\int_{\Gamma_2} y^3 dx - x^3 dy = \begin{bmatrix} x(t)=t \\ y(t)=1-t \\ t: 1 \to 0 \end{bmatrix} = \int_1^0 \left[(1-t)^3 \cdot 1 - t^3 \cdot (-1)\right] dt = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\Gamma_3} y^3 dx - x^3 dy = \begin{bmatrix} x(t)=0 \\ y(t)=t \\ t: 1 \to 0 \end{bmatrix} = \int_1^0 \left[t^3 \cdot 0 - 0 \cdot 1\right] dt = 0$$

Svar: $\int_T y^3 dx - x^3 dy = -\frac{1}{2}$.

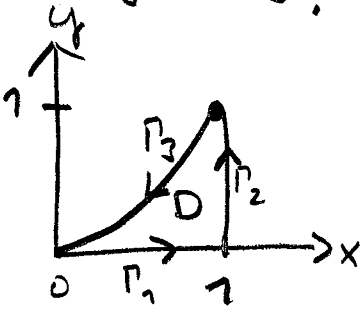
Greens formel med tillämpningar

Om en kurvintegral längs en sluten och enkel kurva Γ som genomlöps i positiv led, (området D innanför Γ till vänster om kurvans genomloppsriktning), är för svår att beräkna kan man ibland skriva om problemet med Greens formel och beräkna en dubbelintegral över D.



Exempel 115. Beräkna $\oint_\Gamma yx\,dx + e^{y^2}dy$ där Γ är den positivt orienterade randkurvan till det slutna området $\bar{D} = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$.

$$\int_{\Gamma_1} yx\,dx + e^{y^2}dy = \begin{bmatrix} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ t: 0 \to 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 (0 \cdot t \cdot 1 + 1 \cdot 0)\,dt = 0$$



$$\int_{\Gamma_2} yx\,dx + e^{y^2}dy = \begin{bmatrix} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ t: 0 \to 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 (t \cdot 1 \cdot 0 + e^{t^2} \cdot 1)\,dt = \int_0^1 e^{t^2}dt$$

$$\int_{\Gamma_3} yx\,dx + e^{y^2}dy = \begin{bmatrix} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ t: 1 \to 0 \end{bmatrix} = -\int_0^1 (t^2 \cdot t \cdot 1 + e^{t^4} \cdot 2t)\,dt$$

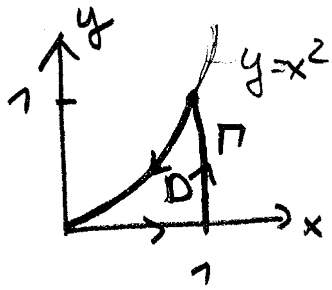
Alltså gäller:

$$\oint_\Gamma yx\,dx + e^{y^2}dy = \int_0^1 (e^{t^2} - 2te^{t^4} - t^3)\,dt = ?$$

Sats 66. (Greens formel). Antag att D är ett begränsat område med en positivt orienterad randkurva Γ som är sluten, enkel, av ändlig längd och sammansatt av ett ändligt antal reguljära delkurvor. Antag att P, Q, P'_y, Q'_x är kontinuerliga på $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Då gäller Greens formel:

$$(48) \quad \oint_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{\overline{D}} \left(Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\right) dx\,dy.$$

Innan vi bevisar Greens formel slutför vi Ex. 115 med hjälp av formel (48).



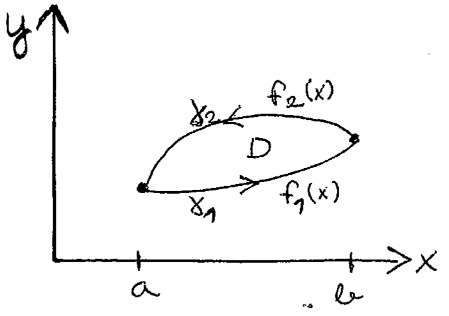
$$\begin{cases} P(x,y) = yx, & P'_y(x,y) = x \\ Q(x,y) = e^{y^2}, & Q'_x(x,y) = 0 \end{cases}$$

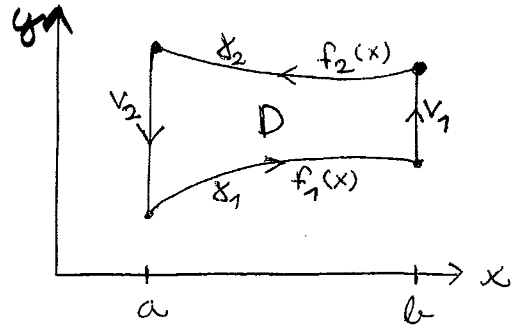
$$\underline{\underline{\oint_\Gamma yx\,dx + e^{y^2}dy}} \overset{(48)}{=} \iint_D (0 - x)\,dx\,dy = -\int_0^1 x\left(\int_0^{x^2} 1\cdot dy\right) dx$$

$$= -\int_0^1 x^3\,dx = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}.$$

Bevis: (Sats 66). Vi bevisar satsen för områden D som är enkla i x-led och y-led. Antag först att området D är enkelt i y-led:





I båda fallen ovan gäller det att $\oint_\Gamma P dx = \oint_{\gamma_1} P dx + \oint_{\gamma_2} P dx$, ty i en parametrisering av v_1 och v_2 i högra figuren är $x(t) = b$ respektive $x(t) = a$, så $dx = x'(t)dt = 0dt$ och $\int_{v_1} P dx = \int_{v_2} P dx = 0$.

Med parametriseringarna: $[x(t) = t,\ y(t) = f_1(t),\ t: a \to b]$ och $[x(t) = t,\ y(t) = f_2(t),\ t: b \to a]$ av γ_1 resp. γ_2 erhålls:

$$\oint_\Gamma P(x,y)\,dx = \int_a^b P(t, f_1(t))\cdot 1\,dt + \int_b^a P(t, f_2(t))\cdot 1\cdot dt$$
$$= \int_a^b P(t, f_1(t))\,dt - \int_a^b P(t, f_2(t))\,dt$$

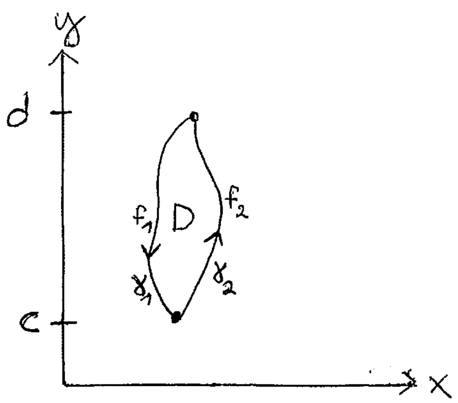
Å andra sidan gäller:

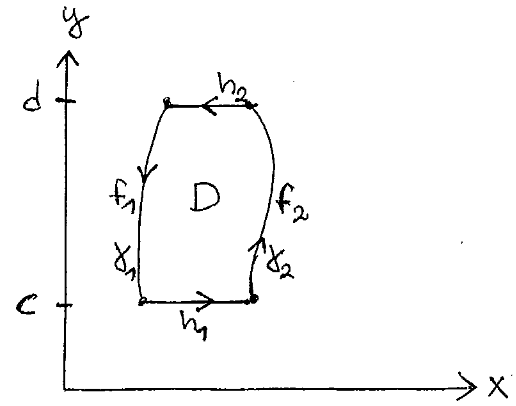
$$\iint_D P'_y(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} P'_y(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left[P(x,y) \right]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx$$
$$= \int_a^b P(x, f_2(x))\,dx - \int_a^b P(x, f_1(x))\,dx.$$

Då gäller det för områden enkla i y-led att:

$$\oint_\Gamma P dx = - \iint_D P'_y(x,y)\,dxdy,$$

Antag nu att D är enkelt i x-led:





Nu gäller det alltid att $\oint_\Gamma Q\,dy = \int_{\gamma_1} Q\,dy + \int_{\gamma_2} Q\,dy$, ty i en parametrisering av h_1 och h_2 i den högra figuren är $y(t)=c$ resp. $y(t)=d$, så $\int_{h_1} Q\,dy = \int_{h_2} Q\,dy = 0$. Analogt med det föregående fallet, (enkelt i y-led), visas:

$$\oint_\Gamma Q\,dy = \iint_{\overline{D}} Q'_x(x,y)\,dx\,dy.$$

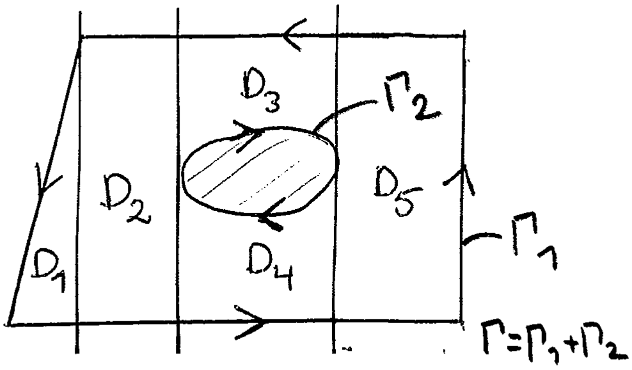
Sammanfattningsvis gäller för områden som är enkla både i y-led och x-led att

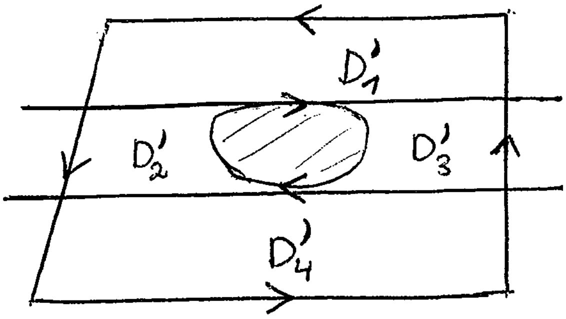
$$\oint_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{\overline{D}} \left(Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) \right) dx\,dy,$$

vilket ger formel (48). □

Anmärkning: Om ett område kan indelas i ett ändligt antal områden som är enkla i y-led och i ett ändligt antal områden som är enkla i x-led så kan Greens formel bevisas och tillämpas med hjälp av våra ovanstående resonemang. Vi kan alltså i Sats 66 tillåta att D:s rand utgörs av flera slutna, enkla och positivt orienterade delkurvor.

Exempelvis kan nedanstående område D med "ett hål" indelas i fem områden enkla i y-led och 4 områden enkla i x-led:





Dessa uppdelningar ger:

$$\oint_\Gamma P\,dx = \sum_{k=1}^{5} \oint_{\gamma_k} P\,dx = -\sum_{k=1}^{5} \iint_{\bar{D}_k} P_y'(x,y)\,dx\,dy = -\iint_{\bar{D}} P_y'(x,y)\,dx\,dy$$

$$\oint_\Gamma Q\,dy = \sum_{k=1}^{4} \oint_{\gamma_k'} Q\,dy = \sum_{k=1}^{4} \iint_{\bar{D}_k'} Q_x'(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\bar{D}} Q_x'(x,y)\,dx\,dy$$

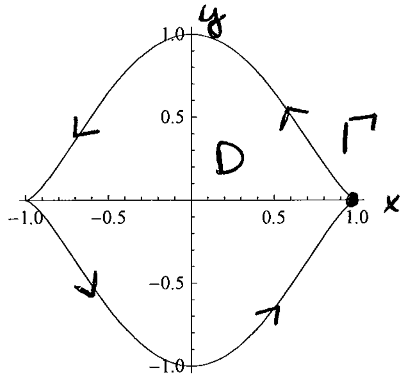
Allt så: $$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_{\bar{D}} \left(Q_x'(x,y) - P_y'(x,y) \right) dx\,dy.$$

Tillämpning 2: Arean av området D innanför en parameterframställd kurva Γ kan under lämpliga förutsättningar beräknas som en kurvintegral:

$$(49)\quad A = \iint_{\bar{D}} dx\,dy = -\oint_\Gamma y\,dx = \oint_\Gamma x\,dy = \frac{1}{2}\int_\Gamma -y\,dx + x\,dy.$$

Exempel 116. Beräkna arean innanför kurvan Γ med parameterframställning $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin^3 t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

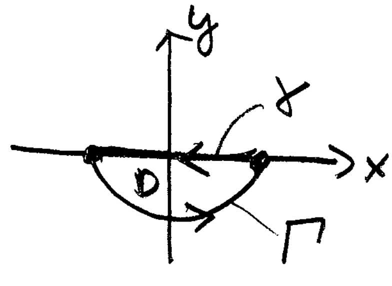
Lösning: Formel (49) ger:



$$\underline{\underline{A}} = \iint_D dx\,dy = \oint_\Gamma x\,dy = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t\,dt$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\,dt = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}.$$

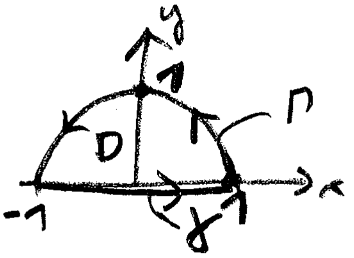
Tillämpning 3: En besvärlig kurvintegral över en öppen, enkel och styckvis reguljär kurva Γ kan ibland beräknas med Greens formel genom att lägga till en kurva γ så att $\Gamma + \gamma$ blir en sluten enkel kurva:



$$(50) \quad \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy - \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Exempel 117. Beräkna $\int_\Gamma y^3\,dx - x^3\,dy$, där Γ är den övre delen av enhetscirkeln från $(1,0)$ till $(-1,0)$.

Lösning: $P = y^3$, $Q = -x^3$



$$\underline{\int_\gamma P\,dx + Q\,dy} = \begin{bmatrix} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ t: -1 \to 1 \end{bmatrix} = \int_{-1}^{1} (0 \cdot 1 - t^3 \cdot 0)\,dt = \underline{\underline{0}}.$$

Formel (50): $\underline{\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy} = \iint_D (-3x^2 - 3y^2)\,dx\,dy - 0 =$

Polära koordinater

$$= -3 \cdot \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 r^2 \cdot r \cdot dr \right) d\theta = -3\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \underline{\underline{-\frac{3\pi}{4}}}.$$

Konservativa fält

Om $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, är ett kraftfält och Γ en reguljär kurva, $\Gamma: \bar{r} = \bar{r}(t)$, $t: a \to b$, kan kurvintegralen $\int_\Gamma \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$ tolkas som arbetet att flytta en enhetspartikel längs Γ från $\bar{r}(a)$ till $\bar{r}(b)$. I många tillämpningar (gravitationsfält, elektrostatiska fält, ...) beror arbetet endast på start- och slutpunkt, och inte på vägen Γ. Vi har i ett sådant fall ett konservativt fält, eller ett potentialfält.

Definition 40. Låt $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett plant vektorfält definierat i ett sammanhängande och öppet område D. Om värdet av kurvintegralen

$$\int_\Gamma \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$$

är lika för alla reguljära, (styckvis reguljära), kurvor Γ i D med samma start- och slutpunkter, så säger man att fältet är konservativt i området.

För ett konservativt kraftfält $\bar{F}$ kan man fastslå en punkt $\bar{P}$ i fältet som referenspunkt och definiera en enhetspartikels potentiella energi $U(\bar{x})$ i punkten $\bar{x} = (x,y) \in D_F$ som det arbete som utförs då partikeln flyttas från $\bar{P}$ till $\bar{x}$:

$$(51) \qquad U(\bar{x}) = \int_{\bar{P}}^{\bar{x}} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r},$$

där $\bar{r}(t)$ parameterframställer en reguljär kurva från $\bar{P}$ till $\bar{x}$.

Om potentialfunktionen $U(\bar{x})$ är känd kan kurvintegralerna mellan punkterna $\bar{A}$ och $\bar{B}$ i fältet beräknas som

$$(52)\qquad \int_{\bar{A}}^{\bar{B}} \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} = U(\bar{B}) - U(\bar{A}),$$

eftersom det gäller att

$$\int_{\bar{A}}^{\bar{B}} \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} = \int_{\bar{A}}^{\bar{P}} \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} + \int_{\bar{P}}^{\bar{B}} \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} = -U(\bar{A}) + U(\bar{B}).$$

Följande viktiga sats ges utan bevis, se kursboken Sats 10.3

Sats 67 (karakterisering av konservativa fält).
Låt $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett vektorfält i ett öppet och sammanhängande område D. Då är följande tre villkor ekvivalenta:

a) Fältet är konservativt,

b) $\oint_\Gamma \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} = 0$ för varje sluten reguljär kurva i D,

c) Det finns en funktion $U(x,y)$, $U: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definierad i D, sådan att

$$(53)\qquad \operatorname{grad} U(x,y) = \bar{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)).$$

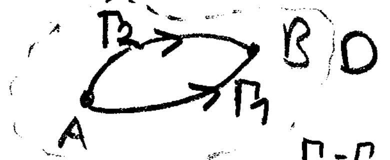
Funktionen U är en potentialfunktion till fältet.

<u>Anmärkning</u>: Att (a) $\Leftrightarrow$ (b) inses ur följande:

(a) $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{\Gamma_2} \bar{F}\cdot d\bar{r}$ oberoende av valet av

av Γ_1, Γ_2 i D från A till B,

$A, B \in D$ godtyckligt valda.



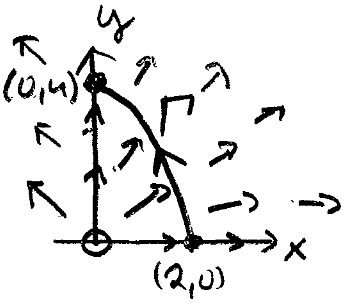
$\Gamma = \Gamma_1 + (-\Gamma_2)$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{\Gamma} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{\Gamma_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} + \int_{-\Gamma_2} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2} = 0$$

för varje sluten (styckvis) reguljär kurva Γ i D.

<u>Exempel 118</u>. Vektorfältet $\bar{F} = (P, Q) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ är <u>konservativt</u> i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ty för $U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ gäller i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ att $\underline{\nabla U(x,y) = (P, Q)}$, dvs. (53) i Sats 67 c) är uppfyllt.

Om vi vill beräkna $\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$ kan vi utnyttja formel (52):



Γ: paraboelbågen $y = 4 - x^2$ från $(2,0)$ till $(0,4)$.

$$\underline{\underline{\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy}} = U(0,4) - U(2,0)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 16 - \frac{1}{2}\ln 4 \; \underline{\underline{= \ln 2}}.$$

(Fältet (P, Q) svarar mot ett elektrostatiskt kraftfält runt en positivt laddad rak ledare genom origo, ortogonal mot xy-planet.)

Sats 68. Om fältet $\bar{F} = (P, Q)$ är konservativt i området D, och P, Q har kontinuerliga partiella derivator i D så gäller

$$(54) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

i hela området D.

Bevis: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}$. □

Exempel 119. Avgör om vektorfälten a) $(P, Q) = (xy, \frac{x^2}{2} + xy)$ b) $(P, Q) = (2xy + y, x^2 + x + 3y^2)$ är konservativa i $\mathbb{R}^2$.

a) $\frac{\partial Q}{\partial x} = x + y \neq x = \frac{\partial P}{\partial y}$, ej konservativt, Sats 68.

b) $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial P}{\partial y}$, eventuellt konservativt!

Söker potentialfunktion U: $\operatorname{grad} U = (P, Q)$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + y & \Rightarrow U(x,y) = \int (2xy + y)\,dx \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + x + 3y^2 & \qquad = x^2 y + xy + g(y) \end{cases}$$

Kräv: $x^2 + x + 3y^2 = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + x + g'(y)$ $\{g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deriverbar.

$$\Rightarrow g'(y) = 3y^2 \Rightarrow g(y) = y^3 + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

$\therefore$ $U(x,y) = x^2 y + xy + y^3 + C$ potentialfunktion för alla $C \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ Sats 67: (P, Q) konservativt vektorfält.