Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Ibland kan beräkningen av en dubbelintegral $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ underlättas genom övergång till nya integrationsvariabler u och v genom en substitution

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$$

varvid området D' i uv-planet avbildas på området D i xy-planet. Orsaken till variabelbytet kan vara ~~ett~~ "krångligt" område D eller en besvärlig integrand.

Substitutionsformeln för enkelintegraler, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)\,dt$, $(x = x(t))$, har då motsvarigheten

$$(*) \quad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du\,dv,$$

där absoluta beloppet av funktionaldeterminanten spelar samma roll som $x'(t)$ för enkelintegraler. Dubbelintegralerna över D och D' definieras med hjälp av areor i xy- respektive uv-planen och den lokala ytskalan vid avbildningen $(u,v) \to (x(u,v), y(u,v))$ är $\left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right|$, se sidorna 97-98, så för "små områden" D och D' gäller

$$m(D) \approx \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| m(D').$$

Formel (*) kan nu motiveras på följande vis: Dubbelintegralen kan approximeras godtyckligt noga med en Riemannsumma: (D_k "små")

$$(**)\quad \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\,m(D_k)\,,\qquad (x_k,y_k)\in D_k\,,\quad D=\bigcup_{k=1}^{n} D_k\,.$$

Låt D_k vara bild av D_k' i uv-planet och (x_k,y_k) bild av $(u_k,v_k)\in D_k'$. Då kan (**) skrivas i formen

$$(***)\quad \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k,v_k),y(u_k,v_k))\,\frac{m(D_k)}{m(D_k')}\,m(D_k')$$

Om även D_k' är "små" borde $\frac{m(D_k)}{m(D_k')}\approx\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|_{(u_k,v_k)}$, och (***) är då en god approximation till högerledet i (*) om indelning av D' i D_k':n är fin.

<u>Vi har</u>, <u>utan bevis</u>, <u>motiverat följande sats</u>:

<u>Sats 61</u>. <u>Formeln för variabelsubstitution</u>:

$$(36)\quad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\cdot\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|\cdot du\,dv$$

gäller under förutsättningarna 1°–3°:

1°. f <u>begränsad</u> och <u>integrerbar</u> över <u>mätbar</u>, <u>begränsad mängd D</u>,

2°. $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ ger <u>omvändbar</u> avbildning av en <u>mätbar</u> och <u>begränsad</u> mängd D' på D.

3°. Funktionerna $x(u,v)$ och $y(u,v)$ har <u>kontinuerliga partiella derivator på D'</u> och <u>$\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\neq 0$ på D'</u>.

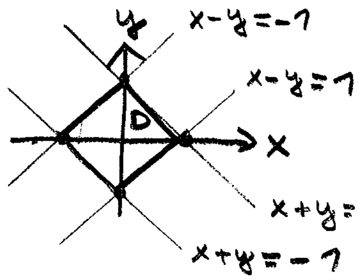
Linjära transformationer

Ett område D i xy-planet som begränsas av linjestycken kan ofta transformeras över till ett område D' i uv-planet som är enkelt i y-led eller x-led med en substitution

$$\begin{cases} u = ax+by \\ v = cx+dy \end{cases} \iff \begin{cases} x = x(u,v) = \dfrac{1}{ad-bc}(du-bv) \\ y = y(u,v) = \dfrac{1}{ad-bc}(-cu+av), \end{cases}$$

om $0 \neq ad-bc = \dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \dfrac{1}{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}}$. Då blir den linjära avbildningen mellan D och D' omvändbar.

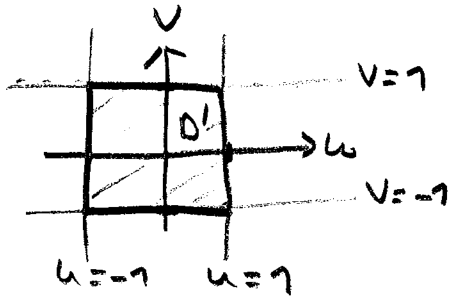
Exempel 99. Beräkna $\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy$ över området $D = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}$.



Lösning: Inför variablerna u och v genom:

$$\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

Då är $D' = \{(u,v) : -1 \leq u \leq 1,\ -1 \leq v \leq 1\}$:



$$\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}.$$

Formel (36) ger:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| \cdot du\,dv$$

$$= \iint_{D'} u^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u^2 \Big(\underbrace{\int_{-1}^{1} 1 \cdot dv}_{=2}\Big)\,du = \int_{-1}^{1} u^2\,du$$

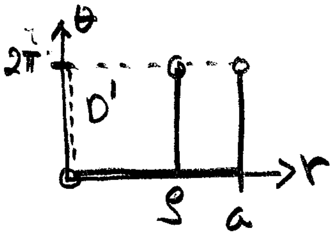
$$= \left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

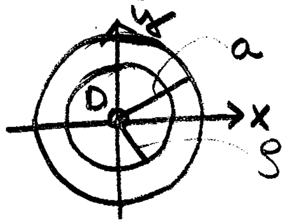
Övergång till polära koordinater

Om området D är en cirkelskiva, en sektor eller en del av en sektor kan det vara fördelaktigt att införa polära koordinater, ifall cirkeln är origocentrerad:

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \\ y = y(r,\theta) = r\sin\theta, \end{cases} \qquad \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Området $D' = \{(r,\theta) : 0 < r \leq a,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$ avbildas bijektivt på $D = \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 \leq a^2\}$.

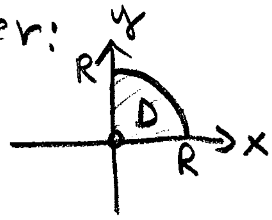


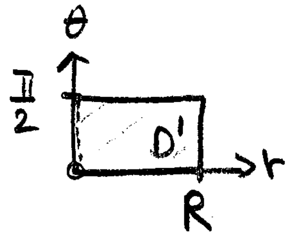


Exempel 100. Beräkna $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ över området $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Lösning: Inför polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 < r \leq R, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{matrix}$$





Formel (36):

$$\underline{\underline{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}} = \iint_{D'} f(x(r,\theta), y(r,\theta)) \cdot \left|\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = \iint_{D'} r^2 \cdot r \cdot dr\,d\theta$$

$$= \int_0^R r^3 \left(\int_0^{\pi/2} 1 \cdot d\theta \right) dr = \frac{\pi}{2} \int_0^R r^3\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \underline{\underline{\frac{\pi}{8} \cdot R^4}}.$$

Om D är en cirkelskiva med radie R och medelpunkt (x_0, y_0) kan man prova med substitutionen:

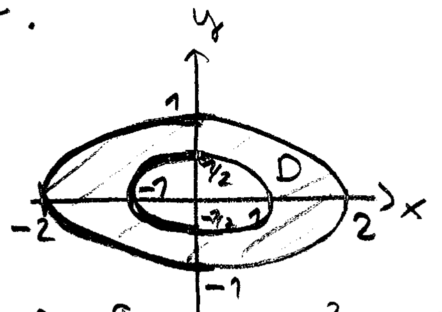
$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = x_0 + r\cos\theta, \\ y = y(r,\theta) = y_0 + r\sin\theta, \end{cases} \qquad \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r.$$

Om D är en origocentrerad ellipsskiva $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$ med halvaxlarna a och b kan man prova:

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = ar\cos\theta, \\ y = y(r,\theta) = br\sin\theta, \end{cases} \qquad \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr.$$

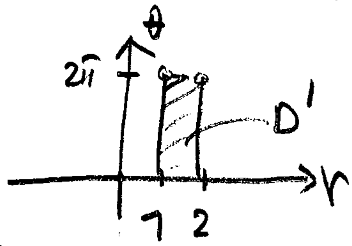
Exempel 101. Beräkna $\displaystyle\iint_{1 \leq x^2+4y^2 \leq 4} x^2\,dx\,dy$.

Lösning:
$$\begin{cases} x^2+4y^2 \leq 4 \iff \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2+4y^2 \geq 1 \iff x^2 + \left(\frac{y}{\frac{1}{2}}\right)^2 \geq 1 \end{cases}$$



$D = \{(x,y) : 1 \leq x^2+4y^2 \leq 4\}$

$$\begin{cases} x = 1 \cdot r \cdot \cos\theta, & 1 \leq r \leq 2, \\ y = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sin\theta & 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$



$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta & \frac{1}{2}r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{r}{2}$$

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \iint_{D'} r^2\cos^2\theta \,\frac{r}{2}\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \left(\int_1^2 r^3\,dr\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 d\theta = \frac{15}{8}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta$$

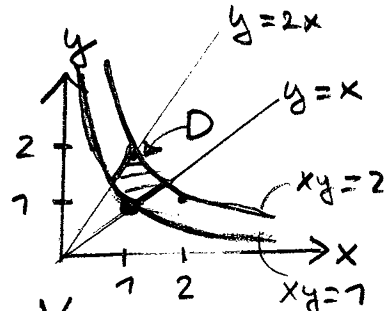
$$= \frac{15}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{15}{16}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

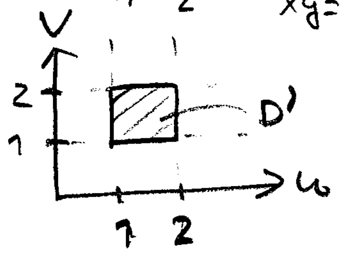
$$= \frac{15}{8}\pi$$

Om man inte kan utföra en "standardsubstitution" måste man kolla att villkoren i Sats 67 är uppfyllda, bl.a. att D' avbildas bijektivt på D och att funktionaldeterminanten är $\neq 0$ i D'.

<u>Exempel 102</u>. Bestäm $I=\iint_D \frac{y e^{y/x}}{x(1+xy)^2}\,dx\,dy$ över området

$D=\{(x,y): 1\le xy\le 2,\ x\le y\le 2x,\ x>0, y>0\}$.





<u>Lösning</u>: $\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{y}{x} - \left(-\frac{y}{x}\right) = 2\cdot\frac{y}{x} = 2v \\ \underline{\underline{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}}} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \underline{\underline{\frac{1}{2v}}}\ \underline{\neq 0 \text{ i } D'}. \end{cases}$$

Tag godt. $(x,y)\in D$. Antag $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in D'$ avbildas på (x,y):

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{u_1}{v_1}} = \sqrt{\frac{u_2}{v_2}} \\ \sqrt{u_1v_1} = \sqrt{u_2v_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \\ u_1v_1 = u_2v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{v_1u_2}{v_2} \\ \frac{v_1^2u_2}{v_2} = u_2v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{v_1u_2}{v_2} \\ v_1^2 = v_2^2 \end{cases} \overset{(v_1,v_2>0)}{\Rightarrow} \begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}.$$

∴ <u>Omvändbar avbildning</u>. <u>Tillämpar Sats 67</u>:

$$\underline{\underline{I}} = \iint_{D'} v\cdot\frac{e^v}{(1+u)^2}\cdot\left|\frac{1}{2v}\right| du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^2\left(\int_1^2 \frac{e^v}{(1+u)^2}\,dv\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2\left[\frac{e^v}{(1+u)^2}\right]_1^2 du = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{e^2-e}{(1+u)^2}\,du = \frac{1}{2}\left[-\frac{e^2-e}{1+u}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-e)\underbrace{\left(-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}_{1/6}$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^2-e}{12}}}.$$

Generaliserade dubbelintegraler

Hittills har vi studerat begränsade funktioner på begränsade mätbara mängder D. Vi skall nu undersöka två typer av generaliseringar:

1°. f begränsad på obegränsad mängd D,

2°. f obegränsad på begränsad mängd D.

Vi börjar med typ 1° och antar att $D \subseteq D_f$ är en obegränsad mängd, samt inför begreppet uttömmande följd för D:

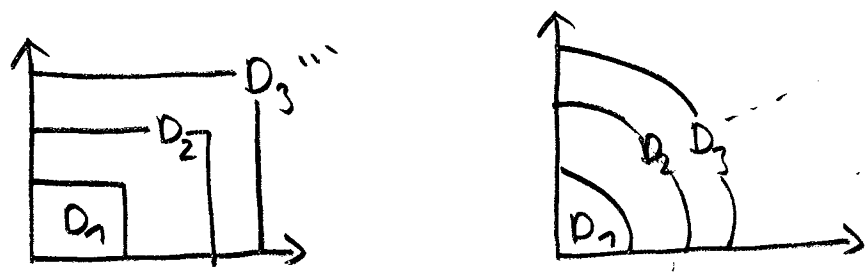
Definition 35. Mängdföljden $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ är en uttömmande följd för den obegränsade mängden D, om

(i) $D_n \subseteq D_{n+1} \subset D$ för alla n,

(ii) D_n är mätbar och begränsad för alla n,

(iii) $\left(D' \subset D \text{ och } D' \begin{cases} \text{mätbar} \\ \text{begränsad} \end{cases}\right) \Rightarrow \exists N : D' \subseteq D_n$ då $n \geq N$.

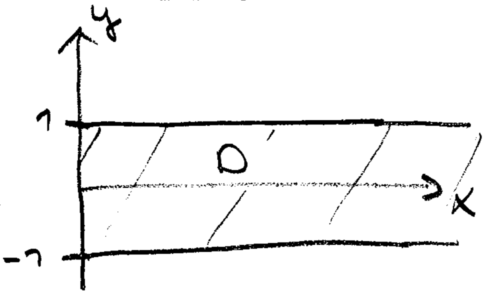
Exempel på uttömmande följder för $D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$



Exempel 103. Vi undersöker om $f(x,y) = y$ kan dubbelintegreras över halvbandet

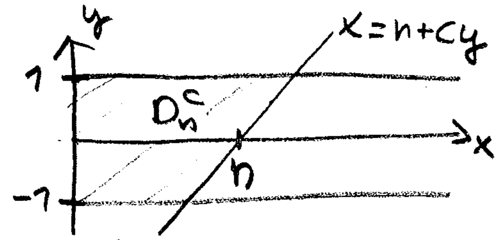
$D = \{(x,y) : x \geq 0, |y| \leq 1\}$.

D är obegränsad och f begränsad på D.



Bildar en uttömmande följd

$D_n^c = \{(x,y) : |y| \leq 1, 0 \leq x \leq n + cy\}$.



För $n > |c|$:

$$\iint_{D_n^{(c)}} y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} y\left(\int_0^{n+cy} 1\,dx\right) dy = \int_{-1}^{1} y(n+cy)\,dy = \int_{-1}^{1} cy^2\,dy = \frac{2}{3}c.$$

Gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n^{(c)}} y\,dx\,dy$ beror av valet av c, vilket gör att vi inte kan definiera $\iint_D y\,dx\,dy$.

Definition 36. Den generaliserade dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ är konvergent om

(i) f är integrerbar över varje begränsad mätbar delmängd av D,

(ii) $\lim_{n\to\infty} I_{D_n}(f)$ existerar och är lika med I för varje uttömmande följd $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ för D.

Då definieras:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := I.$$

I annat fall är dubbelintegralen divergent.

Kravet att kolla gränsvärdet i punkt (ii) i Definition 36 för varje uttömmande följd är ju i praktiken omöjligt. Om funktionen f inte byter tecken på D, ($f \geq 0$ eller $f \leq 0$), har vi följande användbara resultat som ger att det räcker att kolla en uttömmande följd:

Sats 62. Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara begränsad på den obegränsade mängden D. Då är dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ konvergent, om och endast om gränsvärdet

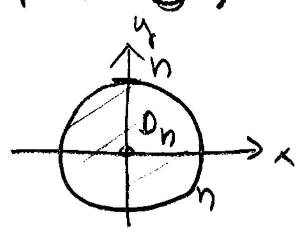
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} |f(x,y)|\,dx\,dy$$

existerar för någon uttömmande följd $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ för D.

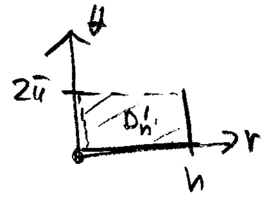
Exempel 104. Undersök om $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ existerar.

Lösning: $D = \mathbb{R}^2$ obegränsad, $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ begränsad på D.

$D_n = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq n^2\}$ uttömmande följd för D.



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $\quad \dfrac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r$.



$$\underline{\underline{I_n}} = \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_n'} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^n e^{-r^2} r\,dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\tfrac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^n d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 - e^{-n^2}) \int_0^{2\pi} 1\,d\theta \;\; \underline{\underline{= \pi(1 - e^{-n^2}) \to \pi, \text{ då } n \to \infty}}.$$

Då $\underline{f(x,y) \geq 0 \text{ på } D = \mathbb{R}^2}$ ger Sats 62 att

$$\underline{\underline{\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi}}.$$

Vi övergår till att behandla generaliseringar av typ 2°:

Definition 37. Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara obegränsad på en begränsad och mätbar mängd D. Då är $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ en uttömmande följd för f i D, om

(i) $D_n \subseteq D$ och $D_n \subseteq D_{n+1}$ för alla n,
(ii) D_n är mätbar och begränsad för alla n,
(iii) $m(D \setminus D_n) \to 0$, då $n \to \infty$,
(iv) f är begränsad på D_n för alla n.

Dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ är konvergent med värdet I, om

(i) f är integrerbar över varje D_n,
(ii) $I_{D_n}(f) \to I$, då $n \to \infty$, för varje uttömmande följd $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ för f i D.

I annat fall är dubbelintegralen divergent.

Igen är det omöjligt att kontrollera varje uttömmande följd. Vi har en sats som är analog med Sats 62 och gör det möjligt att kontrollera en uttömmande följd ifall f inte byter tecken på D. Satsen ges utan bevis.

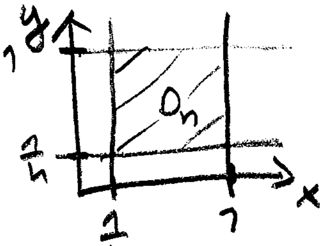
Sats 63. Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara obegränsad på en mätbar begränsad mängd D.
Då är dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ konvergent om och endast om gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} |f(x,y)|\,dxdy \quad \text{existerar}$$

för någon uttömmande följd $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ för f i D.

Exempel 105. Undersök om $\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{xy^2}}\,dxdy$ är konvergent över $D = \{(x,y): 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1\}$.

Sätt: $D_n = \{(x,y): \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\ \frac{1}{n} \leq y \leq 1\}$



$(D_n)_{n=1}^{\infty}$ uttömmande följd för f i D.
$f(x,y)$ obegränsad i D, kontinuerlig på de kompakta mängderna D_n, dvs. integrerbar på D_n.

$$\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt[3]{xy^2}}\,dxdy = \int_{1/n}^{1}\left(\int_{1/n}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{xy^2}}\,dy\right)dx = \left(\int_{1/n}^{1} x^{-1/3}\,dx\right)\left(\int_{1/n}^{1} y^{-2/3}\,dy\right)$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_{1/n}^{1} \cdot \left[3y^{1/3}\right]_{1/n}^{1}$$

$$= \frac{9}{2}(1 - n^{-2/3})(1 - n^{-1/3}) \to \frac{9}{2}, \text{ då } n \to \infty.$$

Då $f(x,y) > 0$ på D ger Sats 63 ~~att~~

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{xy^2}}\,dxdy = \frac{9}{2}.$$

Generaliserade dubbelintegraler och upprepad integration med Fubini's sats

Under vissa antaganden kan en generaliserad dubbelintegral beräknas genom upprepad integration. Betrakta exemplet där integrationsområdet är ett obegränsat halvband

$$D = \{(x,y) ; x \geq a,\ c \leq y \leq d\},$$

och $f(x,y)$ är kontinuerlig på D. Om $I_D(f)$ är konvergent, är den enligt Definition 36 lika med $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$, där $D_n = \{(x,y) : a \leq x \leq n,\ c \leq y \leq d\}$.

Med stöd av Sats 59 gäller:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_a^n \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx,$$

en motsvarighet till formel (33), under förutsättningen att $I_D(f)$ är konvergent.

Nu är det inte klart att man får integrera först med avseende på x, dvs.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^\infty f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d \left(\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

behöver inte gälla. Frågan när vi får kasta om integrationsordningen besvaras av Fubini's sats:

Sats 64. (Fubinis sats). Antag att $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och inte växlar tecken på en mängd

$$D = \{(x,y) : a < x < b,\ c < y < d\},$$

där "värdena" $-\infty$ och ∞ är tillåtna för a och c respektive b och d. (D kan vara en rektangelyta, ett halvband eller hela planet). Då gäller att om någon av de tre integralerna

$$I_1(f) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy, \quad I_2(f) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

och $I_3(f) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$

är konvergent, så är alla tre konvergenta med samma värde.

Anmärkning: Antagandet att f inte växlar tecken är viktigt. I Exempel 103 har vi exempelvis att

$$I_2(f) = \int_0^\infty \left(\int_{-1}^1 y\,dy \right) dx = \int_0^\infty 0\,dx = 0,$$

men varken $I_1(f)$ eller $I_3(f)$ är konvergenta.

Ur satserna 62, 63 och 64 erhålls:

Sats 65. Om någon av integralerna $\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$, $\int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|\,dy \right) dx$ och $\int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|\,dx \right) dy$ är konvergent, så är alla integralerna $I_1(f)$, $I_2(f)$ och $I_3(f)$ konvergenta. (Beteckning som i Sats 64).

Exempel 106. Konvergerar $\iint_D y e^{-\sqrt{x}}\,dx\,dy$ på mängden $D = \{(x,y) : 0 \le x < +\infty,\ -1 \le y \le 1\}$?

Lösning: Betrakta $I = \int_0^\infty \left[\int_{-1}^{1} |y e^{-\sqrt{x}}|\,dy\right] dx$

$$I = \int_0^\infty \left[2\int_0^1 y e^{-\sqrt{x}}\,dy\right] dx = \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$e^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} < \frac{1}{1+\sqrt{x}+\frac{x}{2}+\frac{x^{3/2}}{6}} < \frac{6}{x^{3/2}}, \text{ för } x \ge 1.$$

$\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx$ konvergent och $\int_1^\infty \frac{6}{x^{3/2}}\,dx$ konvergent ger att $I = \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$ konvergent. Enligt Sats 65 är $\iint_D y e^{-\sqrt{x}}\,dx\,dy$ konvergent med värdet

$$I_1(f) = I_2(f) = \int_0^\infty \Big(\underbrace{\int_{-1}^{1} y e^{-\sqrt{x}}\,dy}_{=0}\Big)\,dx = 0.$$

Exempel 107. $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi$ enligt Exempel 104.

Enligt Fubinis sats, Sats 64, gäller då

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy\right)dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right)$$

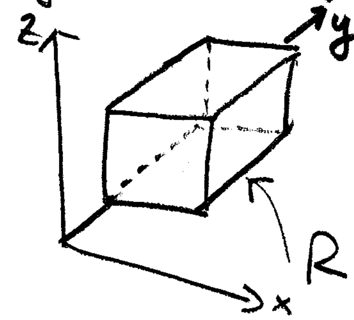
$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$ Då $e^{-x^2} \ge 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.}$$

Observera att e^{-x^2} saknar elementär primitiv funktion.

Trippelintegraler

Allt vi utrett i avsnitten om dubbelintegraler kan naturligt utvidgas till funktioner av tre variabler. För att göra detta behöver vi ett volymmått $m(D)$ av begränsade mätbara mängder $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Låt då $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en begränsad mängd och R ett axelriktat rätblock så att $D \subseteq R$. R indelas nu i axelriktade små rätblock. Låt P_1 vara en union av axelriktade små rätblock som valts så att $P_1 \subseteq D$. Analogt låter vi P_2 vara en union av axelriktade små rätblock som valts så att $D \subseteq P_2$.



Låt $m(P_1)$ = volymen av P_1 och $m(P_2)$ = volymen av P_2. Om man betraktar alla möjliga indelningar av R i axelriktade små rätblock och alla möjliga P_1 och P_2, samt inför talen:

$$\begin{cases} m^*(D) = \inf\limits_{P_2 \supseteq D} m(P_2) & , \text{ yttre måttet} \\ m_*(D) = \sup\limits_{P_1 \subseteq D} m(P_1) & , \text{ inre måttet,} \end{cases}$$

så är D mätbar om $m^*(D) = m_*(D)$, med måttet eller volymen $m(D) := m^*(D) = m_*(D)$.

Antag nu att $f(x,y,z)$ är begränsad på en mätbar och begränsad mängd $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $D \subseteq D_f$.

Låt $(D_k)_{k=1}^n$ vara en indelning av D i mätbara parvis disjunkta delmängder. Definiera:

$$\begin{cases} S_k = \sup\limits_{D_k} f, \\ s_k = \inf\limits_{D_k} f, \quad k=1,\dots,n. \end{cases}$$

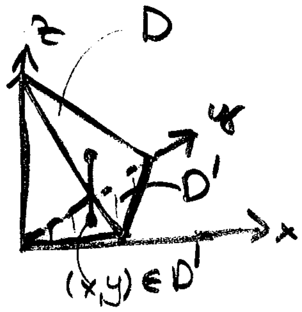
Analogt med definitionen för dubbelintegraler sättes:

$$\begin{cases} I_D^+(f) = \inf\limits_{(D_k)} \sum\limits_{k=1}^n S_k m(D_k), \\ I_D^-(f) = \sup\limits_{(D_k)} \sum\limits_{k=1}^n s_k m(D_k). \end{cases}$$

Då är f integrerbar om $I_D^+(f) = I_D^-(f)$ och har värdet $I_D(f) := I_D^+(f)$.

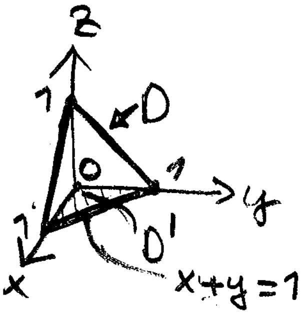
1° Analogt med Sats 59 får vi, om f är kontinuerlig på $D = \{(x,y,z) : (x,y) \in D', \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$, och funktionerna α och β är kontinuerliga på D', formeln

$$(37) \quad \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D'} \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx\,dy,$$



Innebörd: För fixa värden x och y integreras $f(x,y,z)$ med avseende på z över D:s snitt med en linje parallell med z-axeln. Sedan integreras värdet av denna integral över D'. (Man kan även börja med en inre integral med fixerade (x och z) eller (y och z)).

Exempel 108. Beräkna $I = \iiint e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$ över D = tetraeder som begränsas av koordinatplanen och planet $x+y+z=1$.



Enligt 1°, formel (37) erhålls:

$$\underline{\underline{I}} = \iint_{D'}\left[\int_0^{1-x-y} e^{x+y+z}\,dz\right]dx\,dy = \iint_{D'}\left[e^{x+y+z}\right]_0^{1-x-y}dx\,dy$$

$$= \iint_{D'}\left(e-e^{x+y}\right)dx\,dy = \iint_{D'} e\,dx\,dy - \iint_{D'} e^{x+y}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}e - \int_0^1\left[\int_0^{1-x} e^{x+y}\,dy\right]dx = \frac{1}{2}e - \int_0^1\left(e-e^{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}e - \left[ex - e^{x}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{e}{2}-1}}.$$

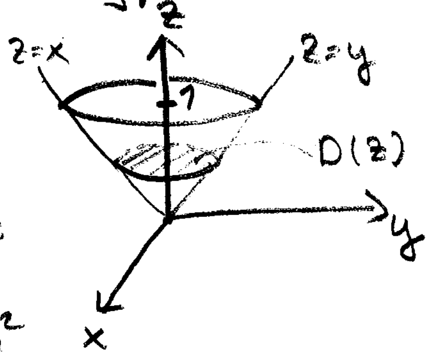
2° Om de <u>x-värden som förekommer i D</u> utgör <u>ett intervall $[a,b]$</u> och $f(x,y,z)$ är <u>kontinuerlig</u> <u>på $D(x) = \{(y,z) : (x,y,z) \in D\}$</u>, för $a \le x \le b$, så har vi formeln

$$(38)\quad \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\left[\iint_{D(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz\right]dx,$$

dvs. vi integrerar först med fixt x-värde över snittet $D(x)$. Värdet av denna dubbelintegral integreras sedan med avseende på x.

Också i fallet 2° kan x, y och z byta roller.

Exempel 109. Beräkna $I = \iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ över kroppen $D = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z,\ 0 \le z \le 1\}$.



Formel (38) ger då:

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1 \left[\iint_{D(z)} z\,dx\,dy\right] dz = \int_0^1 z \Big[\underbrace{\iint_{D(z)} dx\,dy}_{=m(D(z))=\pi z^2}\Big] dz$$

$$= \int_0^1 \pi z^3\,dz = \pi \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

3° Variabelsubstitution: Antag att f är integrerbar, begränsad och att D är en begränsad och mätbar mängd i $\mathbb{R}^3$. Om avbildningen

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

är en omvändbar avbildning av D' på D, där D' är begränsad och mätbar, och $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} \neq 0$ i D' har vi formeln

$$(39)\quad \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{D'} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \left| \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw,$$

för variabelsubstitution i trippelintegraler.