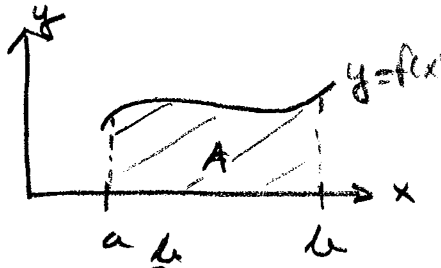
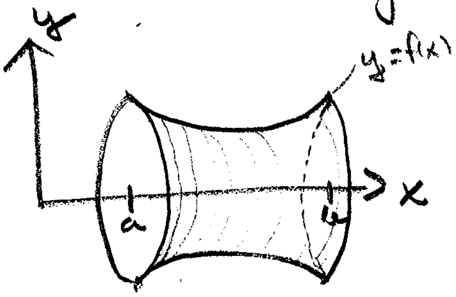
Dubbelintegraler

För en avbildning $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är kontinuerlig och icke-negativ på intervallet $[a,b]$ kan vi använda (enkel) integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ som att mått på ytan mellan grafen av f och x-axeln. Volymer av rotationssymmetriska kroppar och rotationsytor kan även beräknas med enkel integraler.

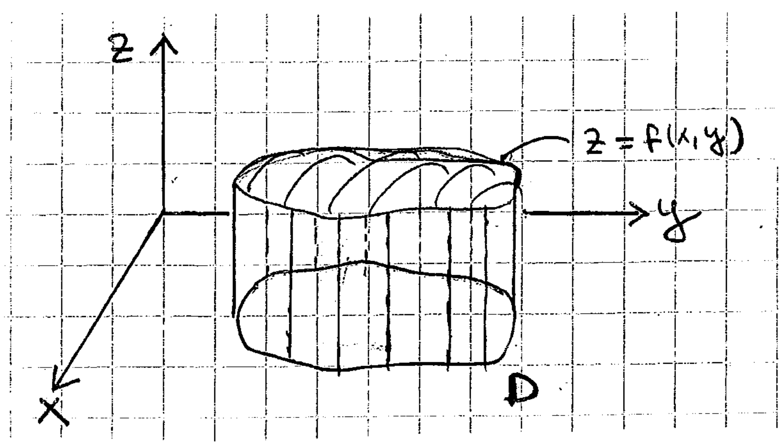


$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$\begin{cases} V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx, \\ A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \end{cases}$$

Med dubbelintegralen kan vi beräkna volymer av kroppar som inte är rotationssymmetriska. Antag att $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är sådan att $f(x,y) \geq 0$ och f är kontinuerlig på en kompakt mätbar mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Då kan vi med $I_D(f) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ beteckna volymen av kroppen $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.



Vi vill definiera dubbelintegralen av f över D, då $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $D \subseteq D_f$. Följande egenskaper är önskvärda hos dubbelintegralen $I_D(f)$:

1. $I_D(f+g) = I_D(f) + I_D(g)$,
2. $I_D(\lambda f) = \lambda I_D(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $I_{D_1 \cup D_2}(f) = I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f)$, då $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,
4. $f(x,y) \leq g(x,y)$ i D $\Rightarrow$ $I_D(f) \leq I_D(g)$.

Definition 32. Indikatorfunktionen $\chi_D(x,y)$ på mängden D definieras genom

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{om } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{om } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

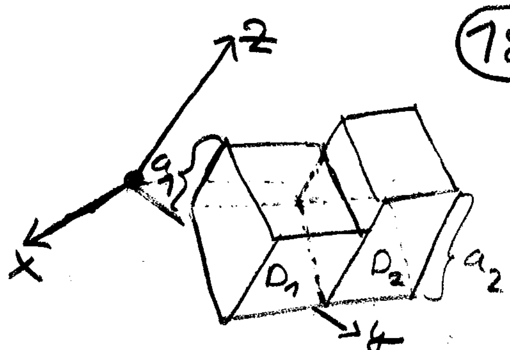
Mängden $D \in \mathbb{R}^2$ är mätbar, om den har en ändlig area, vars mått betecknas $m(D)$. (Detaljer i anmärkning).
Låt D_k, $k = 1, \ldots, n$, vara mätbara parvis disjunkta mängder i $\mathbb{R}^2$, ($D_i \cap D_j = \emptyset$, $i \neq j$), och sätt $D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$.
Funktionen $f(x,y)$, som är konstant a_k på D_k, kallas den mätbara trappfunktionen,

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{D_k}(x,y).$$

Dubbelintegralen av trappfunktionen f över D definieras som talet

$$I_D(f) := \sum_{k=1}^{n} a_k m(D_k).$$

Anmärkning: Man kan lätt visa att $I_D(f)$ uppfyller egenskaperna 1.–4. ovan.



$D = D_1 \cup D_2$

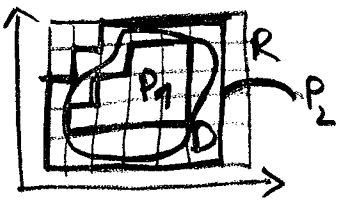
$I_D(f) = a_1 m(D_1) + a_2 m(D_2)$

<u>Anmärkning</u>: Geometriskt är $a_k m(D_k)$, $a_k > 0$, volymen av en "cylinder" med basarean $m(D_k)$ och höjden a_k.

Vi utnyttjar i fortsättningen följande egenskap för mätbara mängder:

$$m(D) = m\Big(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} m(D_k),$$ då $D_i \cap D_j = \emptyset$, $i \neq j$, och $D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$.

<u>Anmärkning</u>: (Om ytmåttet $m(D)$). Betrakta mängden $D \subset \mathbb{R}^2$ och en rektangel R som omfattar D, ($D \subset R$).



R indelas i små rektanglar. Låt P_1 vara en mängd bestående av små rektanglar så att $P_1 \subseteq D$ och likaledes P_2 så att $D \subseteq P_2$.

Arean av P_1 och P_2 kan beräknas som summan av de ingående rektanglarnas areor. Nu kan de ingående rektanglarna göras godtyckligt små och vi sätter:

$$\begin{cases} m^*(D) = \inf\limits_{D \subseteq P_2} m(P_2) = \underline{\text{yttre måttet}} \text{ av } D, \\ m_*(D) = \sup\limits_{P_1 \subseteq D} m(P_1) = \underline{\text{inre måttet}} \text{ av } D. \end{cases}$$

Om $m^*(D) = m_*(D)$ så är D <u>mätbar</u> med <u>måttet $m(D) = m^*(D)$</u>.

Antag nu att $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är begränsad på en mängd $D \subseteq D_f$, som är mätbar och begränsad. Då kan vi jämföra f med mätbara trappfunktioner, för vilka egenskap 4., (sid. 183), gäller och försöka definiera ~~ett~~ tal $I_D(f)$.

Då f är begränsad uppåt på D, $f(x,y) \leq S$ $\forall (x,y) \in D$, finns det mätbara trappfunktioner ψ så att

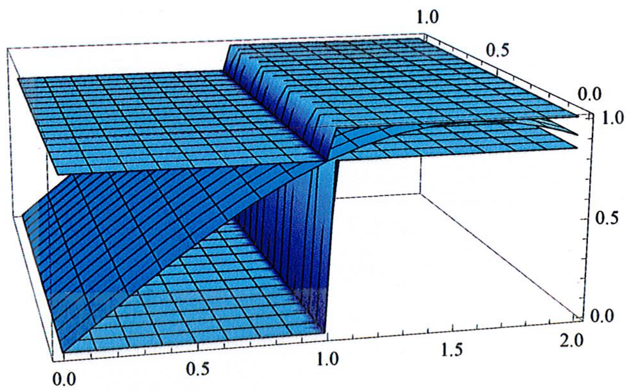
$$\psi(x,y) \geq f(x,y) \quad i\ D,$$

exempelvis $\psi(x,y) \equiv S$ i D. För varje övre trappfunktion vill vi att 4. gäller:

$$I_D(f) \leq I_D(\psi).$$

Analogt finns mätbara undre trappfunktioner $\varphi(x,y) \leq f(x,y)$ i D. (Exempelvis $\varphi(x,y) \equiv s \leq f(x,y)$ i D). För varje undre trappfunktion vill vi att 4. gäller:

$$I_D(\varphi) \leq I_D(f).$$



$f(x,y) = \sin x$ på $([0,1] \times [0,1]) \cup ([1,2] \times [0,1])$ med övre och undre trappfunktion.

Definition 33. Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara begränsad på en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq D_f$.
Överintegralen $I_D^+(f)$ av f över D definieras som

$$I_D^+(f) := \inf I_D(\psi), \text{ då } f \leq \psi \text{ på } D \text{ och } \psi \text{ mätbar trappfunktion}$$

Underintegralen $I_D^-(f)$ av f över D definieras som

$$I_D^-(f) := \sup I_D(\varphi), \ \varphi \leq f \text{ på } D \text{ och } \varphi \text{ mätbar trappfunktion.}$$

Anmärkning: $I_D^-(f) \leq I_D^+(f)$, ty $\varphi \leq f \leq \psi \ \forall (x,y) \in D$ ger att $\sup\limits_{\varphi \leq f} I_D(\varphi) \leq I_D(\psi)$ för varje ψ, så

$$I_D^-(f) = \sup_{\varphi \leq f} I_D(\varphi) \leq \inf_{\psi \geq f} I_D(\psi) = I^+(f).$$

Definition 34. Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara begränsad på en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq D_f$.
Om $I_D^-(f) = I_D^+(f)$, så är f integrerbar över D och det gemensamma värdet $I_D(f) := I_D^-(f) = I_D^+(f)$ kallas dubbelintegralen av f över D och betecknas

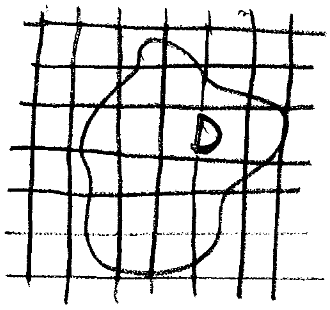
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := I_D(f).$$

Sats 50. Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara begränsad och likformigt kontinuerlig på en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq D_f$. Då är f integrerbar över D.

Bevis: Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. f likformigt kont. ger:

$$\exists\, \delta > 0 : |(x,y) - (x',y')| < \delta,\ (x,y),(x',y') \in D \Rightarrow |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon.$$

Dela in $\mathbb{R}^2$ i kvadrater med sidlängd $< \frac{\delta}{\sqrt{2}}$



D delas in i mätbara parvis disjunkta delar D_k, $k = 1, \dots, n$. Då gäller

$$|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon \quad \text{för } (x,y),(x',y') \in D_k,\ k = 1, \dots, n,$$

eftersom $|(x,y) - (x',y')| < \delta$.

Då f är begränsad på varje D_k existerar för $k = 1, \dots, n$

$$S_k := \sup_{(x,y) \in D_k} f(x,y) \quad \text{och} \quad s_k := \inf_{(x,y) \in D_k} f(x,y).$$

Nu gäller

$$I_D^+(f) - I_D^- \leq \sum_{k=1}^{n} S_k m(D_k) - \sum_{k=1}^{n} s_k m(D_k) = \sum_{k=1}^{n} (S_k - s_k) m(D_k).$$

Tag godtyckligt $\varepsilon' > 0$. Egenskaperna för sup och inf ger:

$$\begin{cases} S_k \leq f(x,y) + \varepsilon', & \text{för något } (x,y) \in D_k, \\ s_k \geq f(x',y') - \varepsilon', & \text{för något } (x',y') \in D_k. \end{cases}$$

Då gäller det för alla $\varepsilon' > 0$ att

$$S_k - s_k \leq f(x,y) - f(x',y') + 2\varepsilon' < \varepsilon + 2\varepsilon',$$

Men detta innebär att $S_k - s_k \leq \varepsilon$. Därmed har vi för alla $\varepsilon > 0$ att

$$I_D^+(f) - I_D^-(f) \leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \cdot m(D_k) = \varepsilon \cdot m(D),$$

vilket innebär att $I_D^+(f) = I_D^-(f)$ och f är integrerbar över D. $\square$

Anmärkning. Om mängden D i Sats 50 är kompakt (sluten och begränsad), så räcker det med att kräva att f är kontinuerlig på D, ty då är ju f även begränsad (Sats 9) och likformigt kontinuerlig (Sats 12).

På basen av beviset av Sats 50 kan vi formulera:

Sats 51. Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara begränsad och likformigt kontinuerlig på en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq D_f$. Då kan $I_D(f) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ approximeras godtyckligt noga med en översumma eller undersumma svarande mot en indelning av D i tillräckligt små mätbara delmängder D_k, dvs. diametern

$$\operatorname{diam}(D_k) := \sup_{\substack{(x,y)\in D_k \\ (x',y')\in D_k}} \{ |(x,y) - (x',y')| \}$$

skall vara tillräckligt liten för varje k.

Med samma indelning som i beviset av Sats 50 låter vi $(x_k, y_k) \in D_k$ vara en godtycklig punkt i D_k. Då gäller $s_k \leq f(x_k, y_k) \leq S_k$ och

$$I_D(f) - \varepsilon' \leq \sum_{k=1}^{n} s_k m(D_k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) m(D_k) \leq \sum_{k=1}^{n} S_k m(D_k) \leq I_D(f) + \varepsilon',$$

där $\varepsilon' = \varepsilon \cdot m(D)$. Alltså gäller:

<u>Sats 52.</u> Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara <u>begränsad</u> och <u>likformigt kontinuerlig</u> på en <u>begränsad</u> och <u>mätbar mängd $D \subseteq D_f$</u>. Då approximerar <u>Riemannsumman</u> $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) m(D_k)$ dubbelintegralen $I_D(f)$ godtyckligt noggrant, om $\max_{1 \leq k \leq n} \operatorname{diam}(D_k)$ är tillräckligt litet.

<u>Viktiga egenskaper hos dubbelintegralen</u>

Följande sats visar att vår definition av $I_D(f)$ uppfyller egenskap 4.

<u>Sats 53.</u> Låt $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara <u>begränsade</u> och <u>integrerbara</u> funktioner över den <u>mätbara</u> och <u>begränsade</u> mängden $D \subseteq D_f \cap D_g$, och antag att $f(x,y) \leq g(x,y)$ för alla $(x,y) \in D$. Då gäller:

$$(27) \quad I_D(f) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy = I_D(g).$$

Bevis: (Sats 53). Låt φ vara mätbar trappfunktion så dan att $\varphi \le f$ i D. Detta implicerar att $\varphi \le g$ i D.

$$I_D(f) = \underline{I}_D(f) = \sup_{\varphi \le f} I_D(\varphi) \le \sup_{\varphi \le g} I_D(\varphi) = \underline{I}_D(g) = I_D(g). \square$$

I det följande verifieras egenskap 3. för $I_D(f)$:

Sats 54. Antag att $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är begränsad och integrerbar över de mätbara och begränsade mängderna D_1 och D_2, $D = D_1 \cup D_2 \subseteq D_f$ och $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Då är f integrerbar över D och $I_D(f) = I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f)$,

$$(28) \quad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Bevis: Visar att $I^-_{D_1 \cup D_2}(f) \ge I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f)$. Analogt visas $I^+_{D_1 \cup D_2}(f) \le I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f)$, och därmed gäller (28).

Tag $\varepsilon > 0$. Då $\exists\ \varphi_1$ mätbar trappfunktion på D_1, $\varphi_1 \le f$ på D_1, så att $I_{D_1}(\varphi_1) \ge I_{D_1}(f) - \varepsilon$. Vidare $\exists\ \varphi_2$ mätbar trappfunktion på D_2, $\varphi_2 \le f$ på D_2, så att $I_{D_2}(\varphi_2) \ge I_{D_2}(f) - \varepsilon$. Definiera:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(x,y), & \text{om } (x,y) \in D_1, \\ \varphi_2(x,y), & \text{om } (x,y) \in D_2. \end{cases}$$

φ mätbar trappfunktion på $D = D_1 \cup D_2$ med $\varphi \le f$ på D.

Då gäller för varje $\varepsilon > 0$:

$$I^-_{D_1 \cup D_2}(f) = \sup_{\varphi \le f} I_{D_1 \cup D_2}(\varphi) \ge I_{D_1 \cup D_2}(\varphi) = I_{D_1}(\varphi_1) + I_{D_2}(\varphi_2)$$
$$\ge I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f) - 2\varepsilon.$$

Alltså gäller det att $I^-_{D_1 \cup D_2}(f) \ge I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f)$. $\square$

Anmärkning: Genom upprepad användning av Sats 54 kan D delas upp i ~~ett~~ ändligt antal mätbara parvis disjunkta delmängder $D_1, \ldots, D_n$ och $I_D(f) = I_{D_1}(f) + \ldots + I_{D_n}(f)$.

Nästa sats etablerar egenskaperna 1. och 2., dvs. att avbildningen $f \mapsto I_D(f)$ är linjär. (I_D linjär operator).

Sats 55. Låt $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara integrerbara funktioner på den mätbara och begränsade mängden $D \subseteq D_f \cap D_g$. Då gäller för $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ~~att~~ $\lambda f + \mu g$ är integrerbar på D och $I_D(\lambda f + \mu g) = \lambda I_D(f) + \mu I_D(g)$,

(29) $$\iint_D (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))\,dx\,dy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \mu \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

Bevis: a) Nu gäller: $\left.\begin{array}{l}\varphi_1 \le f,\ \varphi_1 \text{ trappfunktion} \\ \varphi_2 \le g,\ \varphi_2 \text{ ——\,"\,——}\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\varphi_1 + \varphi_2}_{\text{mätbar trappfunktion}} \le f + g$

Alltså: $$I_D^-(f+g) = \sup_{\substack{\varphi \le f+g \\ \varphi \text{ mätbar trappfkt.}}} I_D(\varphi) \ge \sup_{\substack{\varphi_1 \le f \\ \varphi_2 \le g}} I_D(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$= \sup_{\substack{\varphi_1 \le f \\ \varphi_2 \le g}} \left(I_D(\varphi_1) + I_D(\varphi_2)\right) = \sup_{\varphi_1 \le f} I_D(\varphi_1) + \sup_{\varphi_2 \le g} I_D(\varphi_2)$$

$$= I_D(f) + I_D(g).$$

$\therefore$ $I_D^-(f+g) \ge I_D(f) + I_D(g)$. Analogt: $I_D^+(f+g) \le I_D(f) + I_D(g)$, vilket ger att $f+g$ integrerbar, $I_D(f+g) = I_D(f) + I_D(g)$.

Bevis: (Sats 55) b) Antag att $\lambda \geq 0$: $(\varphi_1 \leq f \Rightarrow \lambda\varphi_1 \leq \lambda f)$

$$I_D^-(\lambda f) = \sup_{\substack{\varphi \leq \lambda f \\ \varphi \text{ mätbar trappfkt.}}} I_D(\varphi) \geq \sup_{\varphi_1 \leq f} I_D(\lambda\varphi_1) = \lambda \sup_{\varphi_1 \leq f} I_D(\varphi_1)$$

$$= \lambda I_D(f)$$

$\therefore$ $I_D^-(\lambda f) \geq \lambda I_D(f)$, analogt: $I_D^+(\lambda f) \leq \lambda I_D(f)$, så $I_D(\lambda f) = \lambda I_D(f)$ då $\lambda \geq 0$. För $\lambda < 0$ visas analogt att λf integrerbar, med hjälp av att $\sup(\lambda A) = \lambda \inf(A)$ om $\lambda < 0$. $\left(I_D^+(\lambda f) = \lambda I_D^-(\lambda f)\right)$ $(\lambda<0)$ $\square$

Sats 56. Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig på den kompakta mätbara mängden $D \subseteq D_f$. Då är $|f|$ integrerbar över D och $|I_D(f)| \leq I_D(|f|)$,

$$(30) \qquad \left| \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

Bevis: f kont. på $D \Rightarrow |f|$ kont. på D (Ex 26)
$\Rightarrow |f|$ likformigt kont. och begränsad på D (Satserna 9, 12)
$\Rightarrow |f|$ integrerbar över D (Sats 50). Nu gäller:

$$-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Satserna 53 och 55 ger

$$-I_D(|f|) = I_D(-|f|) \leq I_D(f) \leq I_D(|f|),$$

alltså gäller $|I_D(f)| \leq I_D(|f|)$ och (30). $\square$

Sats 57. Antag att $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är begränsad på en begränsad mätbar nollmängd D, $m(D)=0$. Då är f integrerbar och $I_D(f)=0$.

Bevis: För $\begin{cases}\varphi \le f, & \varphi \text{ mätbar trappfunktion, gäller } I_D(\varphi)=0,\\ \psi \ge f, & \psi \quad \text{''} \qquad\qquad\qquad\quad I_D(\psi)=0.\end{cases}$

$\therefore\ I_D^-(f) = \sup_{\varphi \le f} I_D(\varphi) = 0$, $I_D^+(f) = \inf_{\psi \ge f} I_D(\psi) = 0$.

Då är $I_D^-(f) = I_D^+(f) = 0$, så f integrerbar och $I_D(f)=0$.

Sats 58. (Medelvärdessatsen för dubbelintegraler).
Om $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerliga på en kompakt, mätbar och sammanhängande mängd D, och om $g(x,y)$ inte byter tecken på D, så är

$$(37) \quad \iint_D f(x,y)g(x,y)\,dxdy = f(a,b)\iint_D g(x,y)\,dxdy$$

för någon punkt (a,b) i D.

Bevis: Antag att $g(x,y) \ge 0$ på D. Då gäller:

$$m = \inf_D f(x,y) \le f(x,y) \le \sup_D f(x,y) = M, \quad \forall (x,y) \in D,$$

vilket ger $(g \ge 0)$ att

$$(*) \quad m\, g(x,y) \le g(x,y) f(x,y) \le M\, g(x,y), \ \forall (x,y) \in D.$$

f, g kont. på kompakta $D \Rightarrow f \cdot g$ kont. på D och dessutom likformigt kontinuerlig och begränsad, så Satserna 50, 53 och 55 ger för (*):

$$m I_D(g) \leq I_D(f \cdot g) \leq M I_D(g).$$

Därmed $\exists\, c \in [m, M]$ så att $I_D(f \cdot g) = c \cdot I_D(g)$

Sats 11 ger att $f(D) = [m, M]$, (D kompakt och sammanhängande)

Då $\exists\, (a,b) \in D$ med $f(a,b) = c$. $\square$

Korollarium (till Sats 58). Om f är kontinuerlig på en kompakt, mätbar och sammanhängande mängd D, så är $I_D(f) = f(a,b) \cdot m(D)$ för någon punkt $(a,b) \in D$,

(32) $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(a,b) \cdot m(D).$$

Bevis: Välj $g(x,y) \equiv 1$ på D. (g mätbar trappfkt.)

Då gäller:

$$I_D(f) = I_D(f \cdot g) = f(a,b) I_D(g) \quad \text{(Sats 58)}$$
$$= f(a,b)\,(1 \cdot m(D))$$
$$= f(a,b)\, m(D),$$

för någon punkt $(a,b) \in D$. $\square$

Upprepad integration

Beräkning av dubbelintegraler kan ofta reduceras till två endimensionella integrationer:

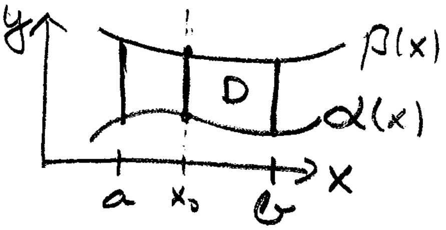
Sats 59. Om $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på en mängd D av formen

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\},$$

där $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga på $[a,b]$ och $\alpha(x) \le \beta(x)$, så gäller

$$(33)\quad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right] dx.$$

Anmärkning: 1°) Ett område av formen D i Sats 59 kallas enkelt i y-led:



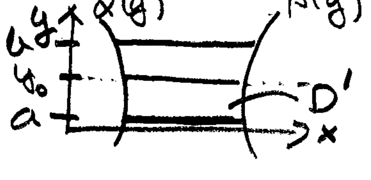
Beräkningsmetoden i (33):

Först integrerar man för varje enskilt x-värde i $[a,b]$ $f(x,y)$ med avseende på y över intervallet $[\alpha(x),\beta(x)]$ och betraktar denna integral som en funktion av x, som sedan integreras med avseende på x över intervallet $[a,b]$.

2°) Om $f(x,y)$ kontinuerlig på $D' = \{(x,y) : a \le y \le b,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$ där $\alpha(y), \beta(y)$ kontinuerliga på $[a,b]$ och $\alpha(y) \le \beta(y)$ så gäller

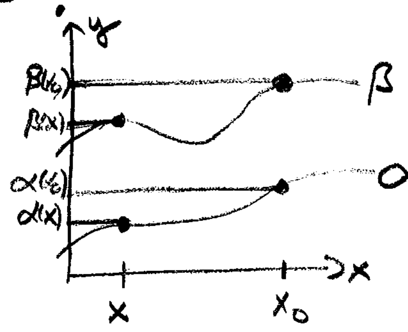
$$(34)\quad \iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right] dy.$$

D' är då enkelt i x-led:



Bevis: (Sats 59). Först visar vi att den inre integralen i högerled av (33) är kontinuerlig på $[a,b]$, definiera därför

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \;, \quad a \le x \le b.$$



Tag $x_0 \in [a,b]$. Undersöker skillnaden:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy - \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f(x_0,y)\,dy$$

$$= \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x_0)} f(x,y)\,dy + \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy - \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x)} f(x_0,y)\,dy - \int_{\beta(x)}^{\beta(x_0)} f(x_0,y)\,dy$$

$$= \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x)} [f(x,y) - f(x_0,y)]\,dy + \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x_0)} f(x,y)\,dy - \int_{\beta(x)}^{\beta(x_0)} f(x_0,y)\,dy = I_1 + I_2 + I_3.$$

$(f$ kont. $\wedge$ D kompakt$) \Rightarrow \exists M > 0 : |f(x,y)| \le M, \ \forall (x,y) \in D.$

$(\alpha(x), \beta(x)$ kont. på $[a,b]) \Rightarrow \exists M' > 0 : |\alpha(x)| \le M', |\beta(x)| \le M', \ x \in [a,b].$

Tag godt. $\varepsilon > 0$. f kont. på kompakt $D \Rightarrow f$ likformigt kont. på D.

$\exists \delta > 0 : (|(x,y) - (x',y')| < \delta, \ (x,y), (x',y') \in D) \Rightarrow |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon.$

$$\begin{cases} \alpha \text{ kont. i } x_0 \Rightarrow \exists \delta' > 0 : |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |\alpha(x) - \alpha(x_0)| < \varepsilon, \\ \beta \text{ — " — } \Rightarrow \exists \delta'' > 0 : |x - x_0| < \delta'' \Rightarrow |\beta(x) - \beta(x_0)| < \varepsilon. \end{cases}$$

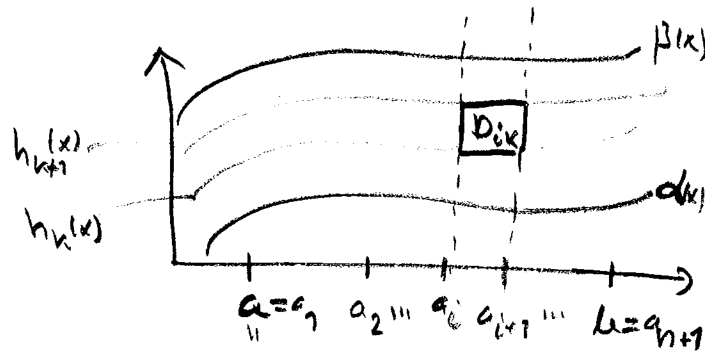
$$\begin{cases} |I_1| = \left| \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x)} [f(x,y) - f(x_0,y)]\,dy \right| \le \varepsilon\, |\beta(x) - \alpha(x_0)|, \text{ om } |x - x_0| < \delta, \\ |I_2| = \left| \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x_0)} f(x,y)\,dy \right| \le M\,|\alpha(x_0) - \alpha(x)| < M \cdot \varepsilon, \text{ om } |x - x_0| < \delta', \\ |I_3| = \left| \int_{\beta(x)}^{\beta(x_0)} f(x_0,y)\,dy \right| \le M\,|\beta(x_0) - \beta(x)| < M \cdot \varepsilon, \text{ om } |x - x_0| < \delta''. \end{cases}$$

$\therefore\ |x - x_0| < \min(\delta, \delta', \delta'') \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| \le 2\varepsilon \cdot M' + 2M\varepsilon = 2(M' + M)\cdot\varepsilon$

$\therefore$ $F(x)$ är kontinuerlig i x_0.

Definiera $h_k(x) = \alpha(x) + \frac{k-1}{m}(\beta(x) - \alpha(x))$, $k = 1, \ldots, m+1$.

Välj D_{ik} som i figuren:



Betrakta:

$$I = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right] dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\sum_{k=1}^{m} \int_{h_k(x)}^{h_{k+1}(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\int_{h_k(x)}^{h_{k+1}(x)} f(x,y)\,dy \right] dx.$$

Sätt: $\begin{cases} S_{ik} = \sup\limits_{(x,y) \in D_{ik}} f(x,y), \\ s_{ik} = \inf\limits_{(x,y) \in D_{ik}} f(x,y). \end{cases}$

Tag godt. $\varepsilon > 0$. Då gäller

$$I \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} S_{ik} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (h_{k+1}(x) - h_k(x))\,dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} S_{ik} \cdot m(D_{ik})$$

$$\leq I_D(f) + \varepsilon, \text{ om indelningen tillräckligt fin,}$$

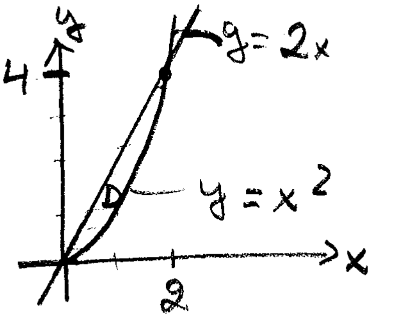
Analogt: $I \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} s_{ik} \, m(D_{ik}) \geq I_D(f) - \varepsilon$, indelningen tillräckligt fin.

$\therefore$ $-\varepsilon \leq I - I_D(f) \leq \varepsilon$ för alla $\varepsilon > 0$,

$\Rightarrow$ $I_D(f) = I$, formel (33) gäller. $\square$

Exempel 97. Beräkna $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, där

$D = \{(x,y) : x^2 \le y \le 2x\}$



D $\begin{cases} \text{enkelt i y-led} \\ \text{— " — x-led} \end{cases}$

alt 1: D enkelt i y-led, tillämpar

Sats 59 med $a=0$, $b=2$, $\alpha(x)=x^2$, $\beta(x)=2x$

OP ger (33) att!

$$\underline{\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy} = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 \left(\frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{3}x^6 \right) dx$$

$$= \left[\frac{7}{6}x^4 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{216}{35}}} \quad (\approx 6{,}17)$$

alt 2: D enkelt i x-led, tillämpar formel (34)

med $a=0$, $b=4$, $\alpha(y) = \frac{y}{2}$ och $\beta(y) = \sqrt{y}$

$$\underline{\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy} = \int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)\,dx \right) dy = \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{y/2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{13}{24}y^3 \right) dy = \left[\frac{2}{15}y^{5/2} + \frac{2}{7}y^{7/2} - \frac{13}{96}y^4 \right]_0^4$$

$$= \underline{\underline{\frac{216}{35}}}.$$

Vi ger följande sats för beräkningar av volymer utan bevis:

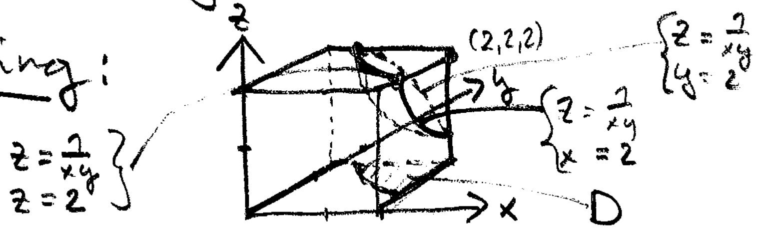
Sats 60. Om $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är begränsade och integrerbara över en mätbar begränsad mängd D och $f(x,y) \geq g(x,y)$ i D, så gäller

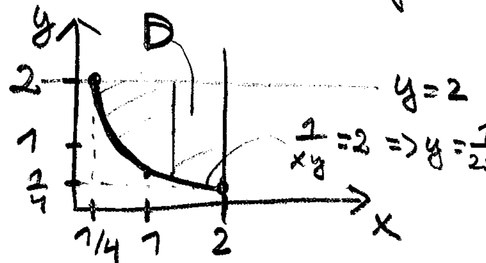
$$(35) \quad \iint_D [f(x,y) - g(x,y)]\, dx\,dy = V(A)$$

där $V(A)$ är volymen av mängden $A = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ g(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$

Exempel 98. En kub K har hörn i punkterna $(0,0,0)$, $(0,0,2)$ och $(2,2,2)$. Kuben delas i två delar av ytan $z = \frac{1}{xy}$. Beräkna volymen av den del som inte innehåller origo.

Lösning:





$f(x,y) \equiv 2$ och $g(x,y) = \frac{1}{xy}$ på D. D enkelt i y-led

Formel (35): (A den del som inte innehåller origo)

$$V(A) = \iint_D [f(x,y) - g(x,y)]\,dx\,dy \overset{(33)}{=} \int_{1/4}^{2} \left[\int_{1/2x}^{2} \left(2 - \frac{1}{xy}\right) dy \right] dx$$

$$= \int_{1/4}^{2} \left[2y - \frac{1}{x}\ln y\right]_{1/2x}^{2} dx = \int_{1/4}^{2} \left(4 - \frac{1}{x}(1+\ln 4) - \frac{1}{x}\ln x\right) dx$$

$$= \left[4x - (1+\ln 4)\ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{1/4}^{2}$$

$$= 7 - 3\ln 2 - \frac{9}{2}(\ln 2)^2 \quad (\approx 2{,}8)$$