Extremvärdesproblem med ett bivillkor

I praktiska tillämpningar av extremvärdesteorin för avbildningar $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kan de ingående variablerna vara beroende av varandra. Detta kan uttryckas med hjälp av ett eller flera bivillkor uttryckta med hjälp av avbildningarna $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, enligt:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 . \end{cases}$$

Definition 31. Att $f(\overline{p})$ är ett lokalt minimum (maximum) till $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ under bivillkoren $g_i(\overline{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$, innebär att:

1°. $\overline{p}$ uppfyller bivillkoren ($g_i(\overline{p}) = 0$, $i = 1, \dots, m$)

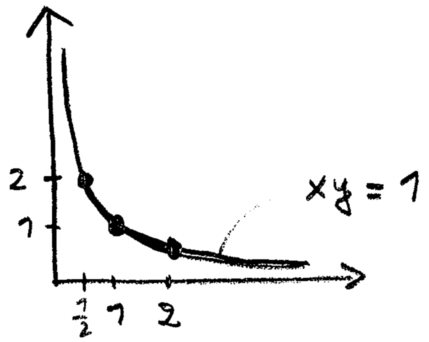
2°. Det finns en omgivning U av $\overline{p}$, så att $f(\overline{p}) \leq f(\overline{x})$, ($f(\overline{p}) \geq f(\overline{x})$), då $\overline{x} \in U \setminus \{\overline{p}\}$ och $\overline{x} \in D_f \cap D_{g_1} \cap \dots \cap D_{g_m}$ och $g_i(\overline{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

$f(\overline{p})$ är ett strängt lokalt minimum (maximum) om vi har stränga olikheter i 2°.

Vi studerar först fallet med ett bivillkor $g(\overline{x}) = 0$.

Exempel 89. Bestäm det kortaste avståndet från origo till punkterna på kurvan $xy = 1$, då $x>0, y>0$.

Lösning: Det kvadrerande avståndet från en punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ till origo ges av $f(x,y) = x^2 + y^2$, som då kan användas som målfunktion.



Vi har bivillkoret $xy = 1$, $x>0, y>0$.

Detta kan skrivas:

$$y = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Vi kan reducera problemet till att beräkna minsta värdet av

$$\varphi(x) = f(x, \tfrac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

Existerar ett sådant? För $x \in (0, \frac{1}{2})$ och $x > 2$ är $\varphi(x) > 4$. Intervallet $I = [\frac{1}{2}, 2]$ är en kompakt mängd och φ är kontinuerlig och deriverbar på I. Då antar φ ett minsta värde på I antingen i en stationär punkt i $(\frac{1}{2}, 2)$ eller i en intervalländpunkt. Då

$$\varphi'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = 2 \cdot \frac{x^4 - 1}{x^3},$$

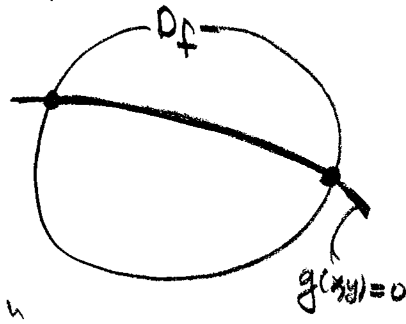
erhålls teckenschemat

x	$\frac{1}{2}$		1		2
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$\frac{17}{4}$		2		$\frac{17}{4}$

Alltså har φ det minsta värdet 2 för $x = 1$, då $x > 0$. Därmed är det kortaste avståndet till origo på kurvan $xy = 1$, $x>0, y>0$, givet av $\sqrt{2}$ och antas i punkten $(1,1)$ på kurvan.

Oftast är det omöjligt att explicit lösa ut en variabel ur bivillkoret $g(\bar{x}) = 0$.

Betrakta problemet att hitta lokala extrempunkter till $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$.



Existensen av globala extrempunkter kan vara en svår fråga som måste lösas från fall till fall. Den enklaste situationen är när snittet av D_f och kurvan $g(x,y)=0$ utgör en kompakt mängd som f är kontinuerlig på. Även randpunkterna till D_f som ingår i snittet bör särbehandlas.

Antag att vi har en lokal extrempunkt i en inre punkt (a,b) i D_f och i D_g. Antag vidare att f och g har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av (a,b) och att $\operatorname{grad} g(a,b) \neq \bar{0}$. Antag t.ex. att $g'_y(a,b) \neq 0$. Då ger Sats 29 (existenssatsen för implicita funktioner), att kurvan $g(x,y)=0$ definierar implicit $y = y(x)$ i en omgivning av (a,b). I en omgivning av (a,b) kan då $g(x,y)=0$ ges en parametrisering $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

Då har $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ ett lokalt extremvärde i punkten t_0, för vilken $(x(t_0), y(t_0)) = (a,b)$. Då gäller med stöd av kedjeregeln att

$$\underline{\underline{0}} = \varphi'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot y'(t_0)$$
$$= \underline{\underline{\operatorname{grad} f(a,b) \bullet (x'(t_0), y'(t_0))}}.$$

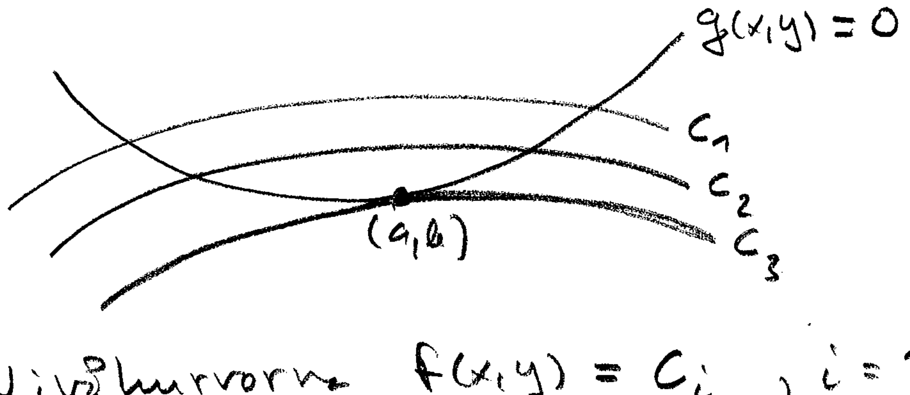
Detta betyder att grad $f(a,b)$ är vinkelrät mot tangenten till kurvan $g(x,y)=0$ i punkten (a,b), men detta gäller ju även för grad $g(a,b)$. Vi har därmed satsen:

Sats 45, Antag att punkten (a,b) är en lokal extrempunkt till $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y)=0$. Antag vidare att (a,b) är en inre punkt i D_f och D_g. Då gäller det att

(20) grad $f(a,b)$ och grad $g(a,b)$ är parallella.

Anmärkning: I härledningen av (20) antogs att grad $g(a,b) \neq \bar{0}$. Om grad $g(a,b) = \bar{0}$ gäller fortfarande (20), ty varje vektor är parallell med nollvektorn.

Villkoret (20) innebär att den nivåkurva $f(x,y)=c$ som går igenom (a,b) har gemensam tangent med nivåkurvan $g(x,y)=0$ i (a,b).



Nivåkurvorna $f(x,y) = c_i$, $i = 1,2,3$

$c_1 < c_2 < c_3 \Rightarrow (a,b)$ lokal maximipunkt

Vid praktiska räkningar måste villkoret (20) omformas till ekvationer, vilket kan göras på två sätt:

1°) Skriv om (20) med en determinant och beakta bivillkoret $g(x,y)=0$. Vi får ett ekvationssystem:

$$(21)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0, \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

för bestämning av (a,b).

2°) Kräver att $\operatorname{grad} g(a,b) \neq \bar{0}$. Då är (20) ekvivalent med att det existerar ett tal λ sådant att $\operatorname{grad} f(a,b) = \lambda \operatorname{grad} g(a,b)$. I komponentform med bivillkoret $g(x,y)=0$ erhålls ekvationssystemet:

$$(22)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

med tre ekvationer och tre obekanta x, y och λ.

Detta är Lagranges multiplikatormetod med den införda hjälpvariabeln, multiplikatorn, λ.

Vi formulerar en sats för Lagranges multiplikatormetod för $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Sats 46. (Lagranges multiplikatormetod, ett bivillkor).
Om $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ är en lokal extrempunkt till problemet:

[Maximera/minimera $f(\overline{x})$ under bivillkoret $g(\overline{x})=0$, där $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator,]

så uppfyller $\overline{x}_0$ för någon konstant λ, (multiplikatorn), villkoren

$$(A) \quad \begin{cases} \operatorname{grad} f(\overline{x}_0) = \lambda \operatorname{grad} g(\overline{x}_0), \\ g(\overline{x}_0) = 0, \end{cases}$$

eller

$$(B) \quad \begin{cases} \operatorname{grad} g(\overline{x}_0) = \overline{0}, \\ g(\overline{x}_0) = 0. \end{cases}$$

Anmärkningar: 1°) Villkoret (A) utskrivet i koordinatform ger ett ekvationssystem med $n+1$ ekvationer och $n+1$ obekanta $(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$.

2°) Villkoret (A) kan omskrivas med Lagrangefunktionen

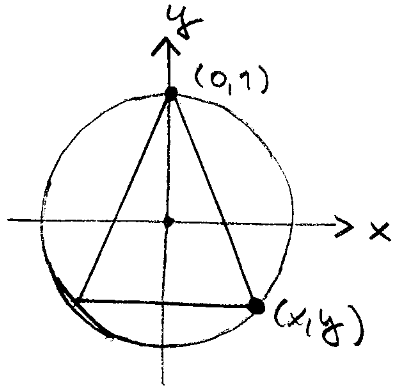
$$F(\overline{x}, \lambda) := f(\overline{x}) - \lambda g(\overline{x})$$

som $$\operatorname{grad} F(\overline{x}, \lambda) = \overline{0},$$

eftersom
$$\operatorname{grad} F(\overline{x}, \lambda) = (f'_{x_1} - \lambda g'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n} - \lambda g'_{x_n}, -g).$$

Exempel 90. Bestäm arean av den största likbenta triangel som kan skrivas in i enhetscirkeln.

Lösning: Betrakta likbenta trianglar med y-axeln som symmetriaxel. Vi maximerar triangelarean



$$f(x,y) = x(1-y), \quad x \geq 0,$$

under bivillkoret $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$. Definitionsmängden för f är $D_f = \{(x,y) : x \geq 0\}$. Bivillkoret definierar en sluten halvcirkelbåge i D_f, som då är kompakt, så f:s kontinuitet garanterar existensen av ett maximum. Maximerande punkten (x,y) är antingen en punkt på randen av D_f, alltså $(0,1)$ eller $(0,-1)$, vilka ger $f=0$ så de utesluts, eller så kan (x,y) bestämmas med Sats 46.

Eftersom $\text{grad}\, g(x,y) = (2x, 2y) \neq \bar{0}$ på enhetscirkeln kommer inte fallet (B) ifråga. Ställer upp ekvationerna (A): (med tillägget $x>0$)

$$\begin{cases} f'_x = \lambda g'_x \\ f'_y = \lambda g'_y \\ g(x,y) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1-y = \lambda 2x \\ -x = \lambda 2y \\ x^2+y^2-1 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Första ekvationen ger λ uttryckt i x och y:

$$\lambda = \frac{1-y}{2x}$$

Insättning i den andra ekvationen reducerar systemet:

$$(*)\begin{cases} -x^2+y^2-y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \\ x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2y^2-y-1=0 \quad \text{ger } y=1 \text{ v } -\frac{1}{2} \\ x^2+y^2-1=0 \\ x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Möjliga maximivärden: $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $\left(f(0,\pm 1)=0\right)$

Triangeln blir liksidig med sidan $\sqrt{3}$.

Alternativt kunde man ställa upp ekvationerna (21):

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-y & -x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2y-2y^2+2x^2=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \overset{(x>0)}{\Longleftrightarrow} (*)$$

Betrakta problemet att bestämma lokala extrempunkter till $f(\bar{x})=f(x,y,z)$ under bivillkoret $g(\bar{x})=g(x,y,z)=0$. Bivillkoret bestämmer en nivåyta i $\mathbb{R}^3$. Antag att (a,b,c) är en punkt på $g(\bar{x})=0$ som ger en lokal extrempunkt för f. Antag vidare att $\operatorname{grad} g(a,b,c)\neq\bar{0}$, säg att $g'_z(a,b,c)\neq 0$. Då är $z=z(x,y)$ i en omgivning av (a,b,c) en beskrivning av nivåytan, (se sida 113). I en omgivning av (a,b,c) kan ytan parametriseras med två parametrar s,t : $\bar{x}(s,t)=(x(s,t),y(s,t),z(s,t))$, där $\bar{x}(s_0,t_0)=(a,b,c)$. För $f(\bar{x}(s,t))$ erhålls med kedjeregeln:

$$\begin{cases} f'_s(\bar{x}(s_0,t_0)) = f'_x\cdot x'_s(s_0,t_0)+f'_y\cdot y'_s(s_0,t_0)+f'_z\cdot z'_s(s_0,t_0) \\ f'_t(\bar{x}(s_0,t_0)) = f'_x\cdot x'_t(s_0,t_0)+f'_y\cdot y'_t(s_0,t_0)+f'_z\cdot z'_t(s_0,t_0) \end{cases}$$

Vilket kan skrivas: $\begin{cases} \nabla f(a,b,c) \bullet \overline{x}'_s(s_0,t_0) = 0, \\ \nabla f(a,b,c) \bullet \overline{x}'_t(s_0,t_0) = 0. \end{cases}$

Då är grad $f(a,b,c)$ vinkelrät mot tangentplanet till ytan $g(\overline{x}) = 0$ i (a,b,c). Men då är grad $f(a,b,c)$ parallell med grad $g(a,b,c)$.

Resonemanget kan utvidgas till $n > 3$ och vi får följande generalisering av Sats 45:

Sats 47. Antag att punkten $(a_1,\ldots,a_n)$ är en lokal extrempunkt till $f(x_1,\ldots,x_n)$ under bivillkoret $g(x_1,\ldots,x_n) = 0$. Antag vidare att $(a_1,\ldots,a_n)$ är en inre punkt i D_f och D_g. Då gäller det att

(23) grad $f(a_1,\ldots,a_n)$ och grad $g(a_1,\ldots,a_n)$ är parallella.

Anmärkning: För $n \geq 3$ kan inte determinantvillkoret (27) längre användas för praktiska beräkningar. Däremot kan vi ju använda Lagranges multiplikatormetod, Sats 46, vilket görs i följande exempel.

Exempel 97. Bestäm det största värdet av

$$f(x,y,z) = x + y^2 + z$$

på enhetssfären.

Lösning: Vi har bivillkoret

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

vilket utgör en kompakt mängd, så vår kontinuerliga målfunktion antar ett största värde på enhetssfären. Vi använder Sats 46: $\operatorname{grad} g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$ på enhetssfären, så villkor (B) i Sats 46 gäller ej. Vi ställer upp ekvationssystemet (A):

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \\ f'_z = \lambda \cdot g'_z \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y \\ 1 = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Ekvation 2 ger att $y = 0$ eller $\lambda = 1$.

1°) $\lambda = 1$: $x = \frac{1}{2} \wedge z = \frac{1}{2} \wedge y^2 = \frac{1}{2} \iff \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

2°) $y = 0$: $x = z \wedge x^2 = \frac{1}{2} \iff \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

I fall 1°) fås funktionsvärdet $\frac{3}{2}$ och i 2°) $\pm\sqrt{2}$.

Därmed erhålls det största värdet i två punkter:

$$f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Extremvärdesproblem med flera bivillkor

Betrakta problemet att bestämma extrempunkter till en funktion $f(\bar{x}) = f(x,y,z)$ under bivillkoren:

$$(24) \quad \begin{cases} g_1(\bar{x}) = 0, \\ g_2(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

Låt $\bar{a} = (a,b,c)$ vara en lokal extrempunkt till f under (24). Antag $\bar{a}$ är en inre punkt i D_f, D_{g_1} och D_{g_2}. Då gäller $g_1(\bar{a}) = g_2(\bar{a}) = 0$. Antag att g_1 och g_2 har kontinuerliga derivator i en omgivning av $\bar{a}$ och att t.ex. $\dfrac{d(g_1,g_2)}{d(y,z)} \neq 0$ i punkten $\bar{a}$.

Då ger Sats 30 att skärningskurvan mellan nivåytorna (24) kan parametriseras i en omgivning av $\bar{a}$: $\bar{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, med $\bar{x}(t_0) = \bar{a}$. Då gäller

$$\frac{d}{dt} f(\bar{x}(t))\Big|_{t=t_0} = f'_x \cdot x'(t_0) + f'_y \cdot y'(t_0) + f'_z\, z'(t_0)$$
$$= \operatorname{grad} f(\bar{a}) \bullet (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = 0.$$

Då är grad $f(\bar{a})$ vinkelrät mot skärningskurvans tangent i $\bar{a}$. Men detta gäller även för grad $g_1(\bar{a})$ och grad $g_2(\bar{a})$, eftersom skärningskurvan ligger i båda nivåytorna (24). Därmed ligger grad $f(\bar{a})$, grad $g_1(\bar{a})$ och grad $g_2(\bar{a})$ i samma plan med normalvektor $\bar{x}'(t_0)$. De tre gradientvektorerna är då linjärt beroende.

Genom att utnyttja Sats 37 kan ~~ett~~ liknande resonemang göras för det allmänna fallet $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $g_1, \ldots, g_p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p<n$.

Sats 48. Antag att punkten $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ är en lokal extrempunkt till $f(x_1, \ldots, x_n)$ under bivillkoren $g_1(\bar{x}) = \ldots = g_p(\bar{x}) = 0$. Antag vidare att $\bar{a}$ är en inre punkt i $D_f, D_{g_1}, \ldots, D_{g_p}$. Då gäller det att

(25) $\operatorname{grad} f(\bar{a}), \operatorname{grad} g_1(\bar{a}), \ldots, \operatorname{grad} g_p(\bar{a})$ är linjärt beroende.

Anmärkning: Antagandet $p<n$ behövs ej i Sats 48, ty om $p \geq n$ har vi $\geq n+1$ vektorer i (25) som då säkert är linjärt beroende i $\mathbb{R}^n$.

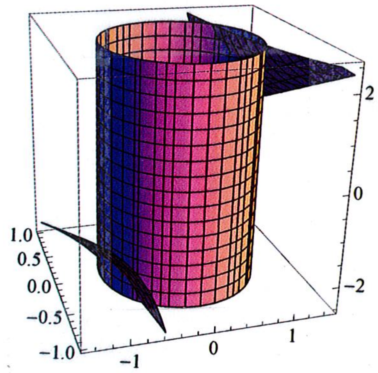
Om $p = n-1$ ger (25) ~~ett~~ determinantvillkor för att med bivillkoren räkna ut kandidater till lokala (inre) extrempunkter:

$$
(26) \quad \begin{cases} \begin{vmatrix} \operatorname{grad} f(\bar{x}) \\ \operatorname{grad} g_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_{n-1}(\bar{x}) \end{vmatrix} = 0 \\ g_1(\bar{x}) = 0 \\ \vdots \\ g_{n-1}(\bar{x}) = 0 \end{cases}
$$

Exempel 92. Bestäm det minsta avståndet till origo från skärningskurvan K definierad av

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = x^2+2y^2-1=0, \\ g_2(x,y,z) = xy+xz-2=0. \end{cases}$$

Lösning: Som målfunktion väljs det kvadrerade avståndet till origo: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.



Minimum existerar, ty K är en sluten mängd och vi kan betrakta minimeringsproblemet för punkter $(x,y,z) \in D = K \cap \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \leq r\}$ för tillräckligt stort r. D är en sluten och begränsad mängd, dvs. kompakt, och f är kontinuerlig på D, så ~~ett~~ minimum antas av f.

Vi beräknar determinanten i (26):

$$\begin{vmatrix} \nabla f(x) \\ \nabla g_1(x) \\ \nabla g_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 4y & 0 \\ y+z & x & x \end{vmatrix} = 2z\left(2x^2-4y(y+z)\right) + x(8xy-4xy)$$

$$= 4(y+z)(x^2-2yz)$$

Ekvationssystemet (26) blir då:

$$\begin{cases} 4(y+z)(x^2-2yz) = 0 \\ x^2+2y^2 = 1 \\ x(y+z) = 2 \end{cases} \overset{(y+z\neq 0)}{\iff} \begin{cases} x^2 = 2yz \\ 2yz+2y^2 = 1 \\ x(y+z) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 2yz \\ 2y(z+y) = 1 \\ x(y+z) = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 2yz \\ 2y = \frac{x}{2} \\ x(y+z) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x \\ y = \frac{x}{4} \\ x(y+z) = 2 \end{cases} \xRightarrow{\text{Insättning i tredje ekvationen}} \underline{x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

Systemet löses av: $\pm\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$. Minsta avståndet är $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ i båda punkterna.

Lagranges multiplikatormetod kan utvidgas till att behandla problem med flera bivillkor:

$$(L_m)\begin{cases}\text{Sök (lokala eller globala) extrempunkter till } f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ \text{då den tillåtna mängden ges av bivillkoren:} \\ \quad \Gamma = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : g_1(\bar{x}) = 0, \dots, g_m(\bar{x}) = 0\}, \\ \text{där } g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.\end{cases}$$

Bivillkoren kan sammanfattas i vektorform:

$$\begin{pmatrix} g_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ g_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = g(\bar{x}) = \bar{0},$$

där $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Sats 49. (Lagrange multiplikatormetod). Om $\bar{x}_0$ är en lokal extrempunkt till problemet (L_m), så uppfyller $\bar{x}_0$ för någon konstant vektor $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$ villkoren:

$$(A) \quad \begin{cases} \operatorname{grad} f(\bar{x}_0) = L^T g'(\bar{x}_0) \\ g(\bar{x}_0) = \bar{0}, \end{cases}$$

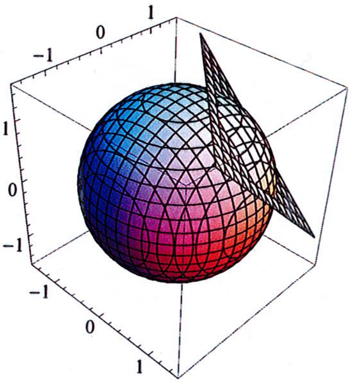
eller

$$(B) \quad \begin{cases} L^T g'(\bar{x}_0) = \bar{0}, \; L \neq \bar{0}, \\ g(\bar{x}_0) = \bar{0}, \end{cases}$$

där $g'(\bar{x}_0)$ är funktionalmatrisen (Jacobimatrisen) i $\bar{x}_0$.

Exempel 93. Bestäm det största och det minsta värdet $f(x,y,z) = xyz$ kan anta på skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2+z^2=2$ och $x+y+z=2$.

Lösning: Vi har bivillkoren $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2=0$ och $g_2(x,y,z) = x+y+z-2=0$. Skärningskurvan är en kompakt cirkulär ring i $\mathbb{R}^3$ och f är kontinuerlig på den, så antas ett största och minsta värde. Vi tillämpar Sats 49:



$$g(\bar{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\bar{x}) \\ g_2(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-2 \\ x+y+z-2 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad} f(\bar{x}) = (yz, xz, xy), \quad g'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$L \in \mathbb{R}^2$, $L^T = (\lambda, \mu)$ Lagrange multiplikatorer.

Betrakta först villkoret (B):

$$L^T g'(\bar{x}) = (0,0,0), \quad (\lambda,\mu) \neq (0,0), \quad g(\bar{x}) = \bar{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda x + \mu = 0 \\ 2\lambda y + \mu = 0 \\ 2\lambda z + \mu = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \\ x+y+z = 2 \\ (\lambda,\mu) \neq (0,0) \end{cases}$$

1°) Första ekv. ger $\lambda \neq 0$, ty annars $(\lambda,\mu) = \bar{0}$

2°) $x = y = z$ erhålls ur de tre första ekv.

3°) Då blir ekv. 4 och 5

$$\begin{cases} 3x^2 = 2 \\ 3x = 2 \end{cases} \Downarrow \text{ Saknar lösning.}$$

Alltså ger villkoret (B) inga kandidatpunkter till maximum eller minimum för f.

Betrakta villkoret (A):

$$\operatorname{grad} f(\bar{x}) = L^T g'(\bar{x}) \ , \ g(\bar{x}) = \bar{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x + \mu & (1) \\ zx = 2\lambda y + \mu & (2) \\ xy = 2\lambda z + \mu & (3) \\ x^2+y^2+z^2 = 2 & (4) \\ x+y+z = 2 & (5) \end{cases}$$

1°) Eliminerar λ och μ: (1)−(2) och (2)−(3) ger

$$\begin{cases} z(y-x) = 2\lambda(x-y) & (6) \\ x(z-y) = 2\lambda(y-z) & (7) \end{cases}$$

$(y-z)\times(6) - (x-y)\times(7)$ ger:

$(y-x)(y-z)(z-x) = 0.$

∴ Minst två av variablerna måste vara lika.

2°) Fallet $x=y$: Ekv. (4) och (5) ger

$$\begin{cases} 2x^2+z^2 = 2 \\ 2x+z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2-4x+1 = 0 \\ z = 2(1-x) \end{cases}$$

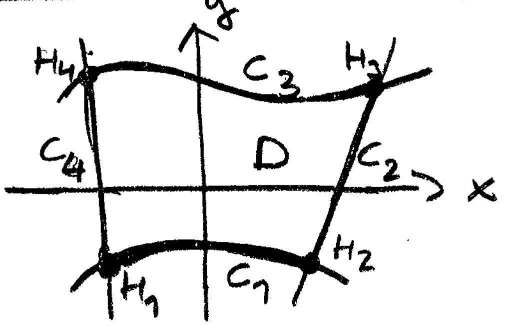
$$\Rightarrow (x,y,z) = (1,1,0) \text{ eller } \left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{4}{3}\right)$$

Av symmetriskäl är även $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ och $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ lösningar till (A).

Funktionen f antar sitt minsta värde 0 i punkterna $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ och $(1,1,0)$, samt sitt största värde $\frac{4}{27}$ i punkterna $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ och $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Största och minsta värden på kompakta mängder

Om $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på en kompakt mängd D, så antar f ~~ett~~ största (minsta) värde $f(\bar{P})$ på D. Antag att $n=2$ och att D begränsas av kurvorna $C_1,\dots,C_n$ vars skärningspunkter bildar hörnen H_k.



Det föreligger fyra möjligheter för $\bar{P}$:

1°. $\bar{P}$ inre punkt i D, f har partiella derivator i $\bar{P}$: $\bar{P}$ lokal extrempunkt och $\operatorname{grad} f(\bar{P}) = \bar{0}$.

2°. $\bar{P}$ inre punkt i D, f saknar partiella derivator i $\bar{P}$.

3°. $\bar{P}$ ligger på randkurvan C_k, men är ej en hörnpunkt: $\bar{P}$ behöver inte vara stationär punkt för f, men är en lokal extrempunkt under bivillkoret $(x,y) \in C_k$.

4°. $\bar{P}$ är en hörnpunkt H_k: $\bar{P}$ behöver inte vara lokal extrempunkt för f under bivillkoret $(x,y) \in C_k'$ där $C_k' = C_k \cup \{$förlängningen av C_k förbi hörnet $H_k\}$, ty f kan anta värden större än (mindre än) $f(\bar{P})$ godtyckligt nära $\bar{P}$ på C_k:s förlängning.

Exempel 94. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x,y) = x + x^2 + y^2$ på den kompakta cirkelskivan:

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Lösning: Stationära punkter ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$ Inre punkt i D

För att undersöka ∂D övergår vi till polära koordinater:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Definiera $\varphi(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 1 + \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{cases} \varphi(0) = 2 = \varphi(2\pi), & \text{största värde på } [0, 2\pi] \\ \varphi(\pi) = 0, & \text{minsta värde på } [0, 2\pi]. \end{cases}$$

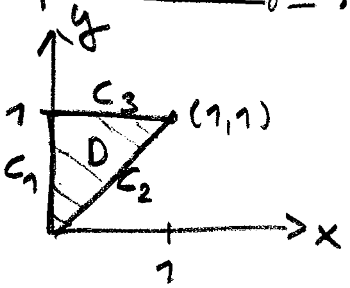
Funktionen f:s största och minsta värde söks bland:

$$f(-\tfrac{1}{2}, 0) = -\tfrac{1}{4}, \quad f(\underbrace{1,0}_{t=0,2\pi}) = 2, \quad f(\underbrace{-1,0}_{t=\pi}) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} \text{Största värdet är } f(1,0) = 2, \\ \text{Minsta värdet är } f(-\tfrac{1}{2}, 0) = -\tfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Exempel 95. Bestäm det största värdet av funktionen $f(x,y) = 3 + x - x^2 - y^2$, $0 \le x \le y \le 1$.

Lösning: Definitionsmängden är en kompakt triangel. Ett största värde existerar.



De stationära punkterna ges av:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (\tfrac{1}{2}, 0) \notin D$$

Ingen stationär punkt i D°, det största värdet antas på ∂D.

1°) Sträckan C_1: $\varphi_1(y) = f(0,y) = 3 - y^2$, $y \in [0,1]$.
Maximum antas för $y = 0$, $f(0,0) = 3$.

2°) Sträckan C_2: $\varphi_2(x) = f(x,x) = 3 + x - 2x^2$, $x \in [0,1]$.
$\varphi_2'(x) = 1 - 4x = 0 \iff x = \frac{1}{4}$.
Största värde antas antingen i $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ eller i någon av hörnpunkterna $(0,0)$ och $(1,1)$.

3°) Sträckan C_3: $\varphi_3(x) = f(x,1) = 2 + x - x^2$, $x \in [0,1]$.
$\varphi_3'(x) = 1 - 2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.
Bör beakta: $(0,1)$, $(\frac{1}{2}, 1)$ och $(1,1)$ på C_3.

$\therefore$ Möjliga punkter för maximum av f är:
$(0,1)$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(\frac{1}{2}, 1)$,
med funktionsvärdena: 2, $\frac{25}{8}$, 3, 2, $\frac{9}{4}$

Svar: $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{25}{8}$ är det största värdet på D.

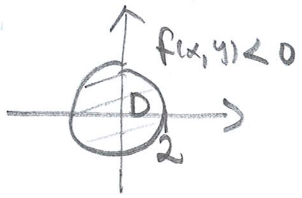
Största och minsta värden på icke-kompakta mängder

På icke-kompakta mängder är existensen av största och minsta värde inte garanterad. Ofta försöker man göra en lämplig kompakt avskärning av definitionsmängden, och visar (ofta med uppskattningar), att värdena utanför avskärningen inte påverkar resultatet.

Exempel 96. Bestäm största och minsta värde, (om de existerar), av $f(x,y) = e^{x+y}(4-x^2-y^2)$, $D_f = \mathbb{R}^2$.

Lösning: $f(x,y) < 0$ utanför cirkeln $x^2+y^2=4$.

Sätt $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\}$, kompakt mängd.



f antar största värde på D.

Stationära punkter:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y}(4-x^2-y^2-2x) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}(4-x^2-y^2-2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x^2-2x=0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)=(1,1) \in D \\ \text{eller} \\ (x,y) = (-2,-2) \notin D \end{cases}$$

$f(1,1) = 2e^2 (\approx 14{,}78)$ och $f(x,y) = 0$ på ∂D.

$\therefore$ Största värdet på $\mathbb{R}^2$ är: $f(1,1) = 2e^2$.

Minsta värde? Betrakta $f(x,y)$ på linjen $y=x$:

$f(x,x) = e^{x+x}(4-x^2-x^2) = e^{2x}(4-2x^2) \longrightarrow -\infty$, då $x \to \infty$

$\therefore$ Minsta värde saknas.