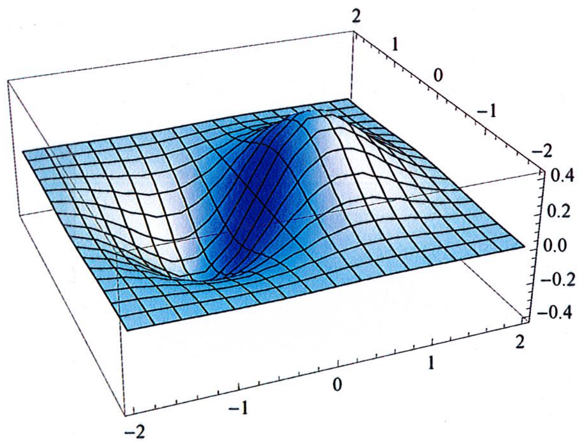
Extremvärdesproblem

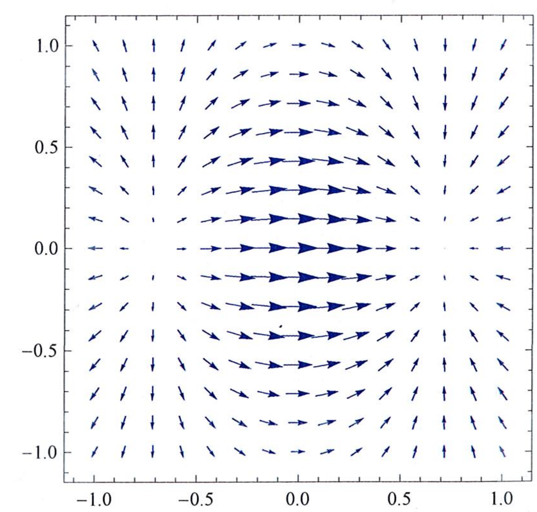
Inledande exempel

Vi betraktar problemet att för en avbildning $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kallad <u>målfunktionen</u>, bestämma <u>lokala</u> eller <u>globala</u> extremvärdespunkter, där f antar ett minimivärde eller maximivärde lokalt eller globalt. Målfunktionen f kan undersökas på <u>hela sin definitionsmängd</u> (utan bivillkor) eller på en delmängd av D_f <u>specificerad med bivillkor i form av likheter eller olikheter</u>.

<u>Exempel 78</u>. Funktionen $f(x,y) = x e^{-x^2-y^2}$ antar <u>globalt maximum</u> $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0,43$, och <u>globalt minimum</u> $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{1}{\sqrt{2e}} \approx -0,43$.

$\nabla F(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \bar{0}$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ <u>stationära punkter</u>.



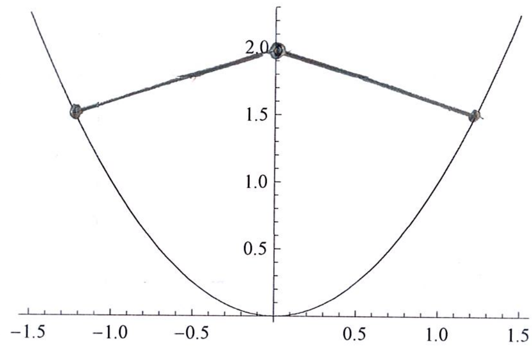


<u>Gradientfältet $\nabla F(x,y)$</u>

Exempel 79. För att bestämma de punkter (x,y) på kurvan $y=x^2$ som ligger närmast punkten $(0,2)$ kan vi bilda den kvadrerade avståndsfunktionen

$$f(x,y) = (x-0)^2+(y-2)^2 = x^2+(y-2)^2,$$ och

sedan bestämma minimum av $f(x,y)$ under bivillkoret $y=x^2$.



$g(x) = f(x,x^2) = x^2+(x^2-2)^2$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow (x=0) \vee x=\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}$

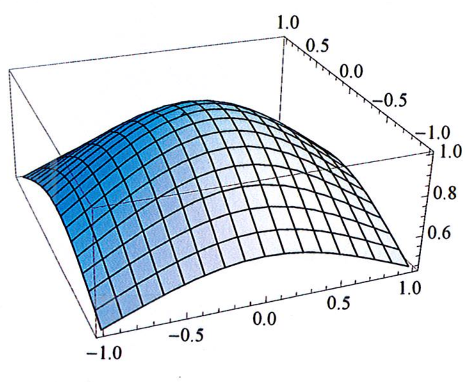
$g(\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}) = \tfrac{7}{4}$. Avståndet minimalt $= \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1{,}32$ i punkterna $\left(\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \tfrac{3}{2}\right)$.

Exempel 80. Funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

är kontinuerlig på den kompakta mängden $M=\{(x,y): -1\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 1\}$ och antar sitt största värde 1 i $(0,0)$ och sitt minsta värde $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$ i hörnpunkterna $(\pm1,\pm1)$ av M.

Mängden M utgör bivillkor i form av olikheter för f.



På sin definitionsmängd R^2 antar f varken lokalt eller globalt minimum.

Lokala maxima och minima

Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och antag att $\bar{p} \in D_f$ är en icke-isolerad punkt, dvs. $\forall \varepsilon > 0 : (O_\varepsilon(\bar{p}) \setminus \bar{p}) \cap D_f \neq \emptyset$.

Godtyckligt nära $\bar{p}$ finns andra punkter i D_f.

Definition 29. $f(\bar{p})$ är ett lokalt maximum för f om $\exists \varepsilon > 0 : (\bar{x} \in O_\varepsilon(\bar{p}) \wedge \bar{x} \in D_f) \Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(\bar{p})$. $f(\bar{p})$ är ett strängt lokalt maximum för f om $\exists \varepsilon > 0 : (\bar{x} \in O_\varepsilon(\bar{p}) \wedge \bar{x} \in D_f \setminus \{\bar{p}\}) \Rightarrow f(\bar{x}) < f(\bar{p})$. $f(\bar{p})$ är ett lokalt minimum för f om $\exists \varepsilon > 0 : (\bar{x} \in O_\varepsilon(\bar{p}) \wedge \bar{x} \in D_f) \Rightarrow f(\bar{x}) \geq f(\bar{p})$. $f(\bar{p})$ är ett strängt lokalt minimum för f om $\exists \varepsilon > 0 : (\bar{x} \in O_\varepsilon(\bar{p}) \wedge \bar{x} \in D_f \setminus \{\bar{p}\}) \Rightarrow f(\bar{x}) > f(\bar{p})$.
Om $f'_{x_1}(\bar{p}) = \ldots = f'_{x_n}(\bar{p}) = 0$, eller ekvivalent om $\nabla f(\bar{p}) = \bar{0}$, kallas $\bar{p}$ en stationär punkt för f.
(kritisk punkt)

Sats 40. Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och antag att $\bar{p} \in D_f$ är en inre punkt i D_f. Antag att f har partiella derivator av första ordningen i punkten $\bar{p}$ och att $f(\bar{p})$ är ett lokalt extremvärde.
Då är $\bar{p}$ en stationär punkt för f, dvs.
$$\operatorname{grad} f(\bar{p}) = \bar{0} \quad (\nabla f(\bar{p}) = \bar{0}).$$

Bevis: (Sats 40). Antag att f är definierad i en omgivning av punkten $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ och att de partiella derivatorna av första ordning existerar i $\bar{p}$. Om f har ett lokalt extremvärde i $\bar{p}$ så är $f'_{x_1}(\bar{p}) = \ldots = f'_{x_n}(\bar{p}) = 0$, ty avbildningarna

$\varphi_j(x) = f(p_1, \ldots, p_{j-1}, x, p_{j+1}, \ldots, p_n)$, $\varphi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, har lokala extremvärden i $x = p_j$ och är deriverbara där, så enligt envariabelanalysen gäller: $\varphi_j'(p_j) = 0$, vilket ger att $\nabla f(\bar{p}) = \bar{0}$. $\square$

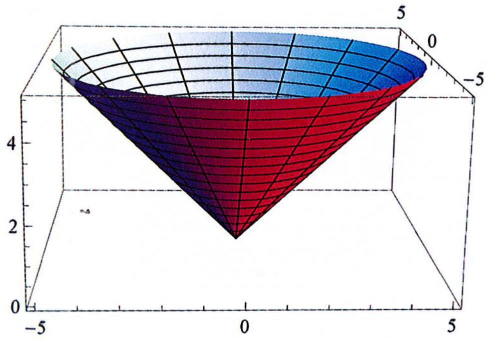
Anmärkning: 1°) Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $\bar{p} = (x_0, y_0)$ är punkten i Sats 40, så är tangentplanet till $z = f(x,y)$ i (x_0, y_0) givet av

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$= f(x_0, y_0),$$

som då är horisontellt, (parallellt med xy-planet).

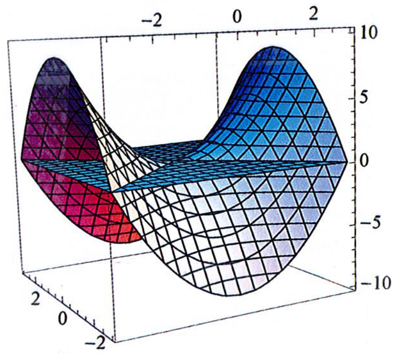
2°) Om den tillåtna mängden M där vi söker extrempunkter inte är öppen och en extrempunkt (x_0, y_0) ligger på randen av M så behöver inte $\nabla f(x_0, y_0)$ vara $\bar{0}$ och därmed inte heller tangentplanet horisontellt, jämför hörnpunkterna $(\pm 1, \pm 1)$ för M i Exempel 80, som ger lokala minipunkter för f i mängden M.

Observera att lokalt extremvärde kan förekomma i punkter där f inte är partiellt deriverbar, exempelvis har $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ lokalt och globalt minimum i origo:



Villkoret $\nabla f(\bar{p})=\bar{0}$ är <u>inte tillräckligt</u> för att $f(\bar{p})$ skall vara ett lokalt extremvärde.

Om t.ex. $f(x,y)=x^2-y^2$, så är $\nabla f(0,0)=\bar{0}$, men $f(x,0)=x^2$ har <u>minimum</u> i $x=0$ medan $f(0,y)=-y^2$ har <u>maximum</u> i $y=0$. Vi har då att $(0,0)$ är en <u>sadelpunkt</u> till ytan $z=x^2-y^2$.
(En <u>stationär punkt</u> (a,b) till $f(x,y)$ är en <u>sadelpunkt</u> om $z=f(x,y)$ skär sitt tangentplan $z=f(a,b)$ längs en kurva med två grenar genom $(a,b,f(a,b))$.)



Lokala extremvärden för avbildningar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

En funktions $f(x,y)$ uppförande i en omgivning av en stationär punkt $\bar{a} = (a,b)$, $(\nabla f(\bar{a}) = \bar{0})$, kan studeras med hjälp av Taylorutvecklingen:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \underbrace{\nabla f(\bar{a})}_{=\bar{0}} \cdot (\bar{x}-\bar{a}) + \frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{a})^T H_f (\bar{x}-\bar{a}) + O(|\bar{x}-\bar{a}|^3)$$

$$= f(\bar{a}) + \frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{a})^T H_f (\bar{x}-\bar{a}) + O(|\bar{x}-\bar{a}|^3),$$

där Hessematrisen $H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$ och andra-differentialen $d^2 f(\bar{a})$ ges då av:

$$d^2 f(\bar{a}) = (\bar{x}-\bar{a})^T H_f (\bar{x}-\bar{a})$$

$$= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b),$$

som är ett homogent polynom av graden ≤ 2 med andraderivatorna till f i punkten $\bar{a}$ som koefficienter. Detta är en kvadratisk form.

Funktionen $f(x,y)$ approximeras lokalt i en omgivning av punkten (a,b) av polynomet:

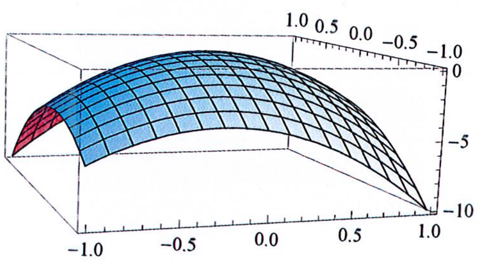
$$q(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2}\, p(h,k), \qquad (h,k) = (x-a,\, y-b),$$

och

$$p(h,k) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$
$$=: Ah^2 + 2Bhk + Ck^2,$$

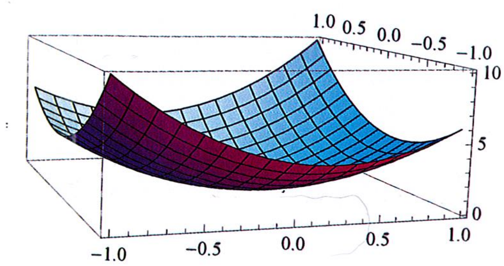
där vi infört:
$$\begin{cases} A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \\[2mm] B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b), \\[2mm] C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b). \end{cases}$$

För $p(h,k)$ gäller i punkten $(h,k) = (0,0)$ att om $AC - B^2 > 0$ så har vi en elliptisk paraboloid med strängt lokalt maximum om $A < 0$ och strängt lokalt minimum om $A > 0$.



$p(h,k) = -4h^2 + 2hk - 4k^2$

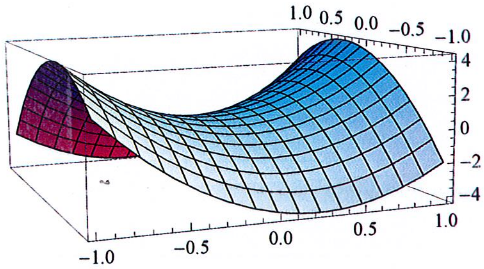
$(AC - B^2 > 0,\ A < 0)$



$P(h,k) = 4h^2 + 2hk + 4k^2$

$(AC - B^2 > 0,\ A > 0)$

Om för $p(h,k)$ i punkten $(h,k)=(0,0)$ gäller att $AC-B^2<0$ så har vi en hyperbolisk paraboloid, en sadelpunkt, och $p(h,k)$ saknar extremvärde i punkten $(h,k)=(0,0)$.



$$p(h,k)=4h^2+2hk-4k^2$$
$$(AC-B^2<0)$$

Det lokala beteendet hos $p(h,k)$ i en omgivning av $(0,0)$ utsäger funktionens lokala beteende i en omgivning av (a,b):

Sats 47. Antag att $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator upp till ordning 3 i en omgivning av punkten $\bar{a}=(a,b)$, som är en stationär punkt till f, $(\nabla f(\bar{a})=\bar{0})$. Om det för andradifferentialen

$$d^2f(\bar{a})=Ah^2+2Bhk+Ck^2\,(=p(h,k))$$

gäller:

1°) $AC-B^2>0$: Då är (a,b) en sträng lokal maximipunkt om $A<0$ och en sträng lokal minimipunkt om $A>0$.

2°) $AC-B^2<0$: Då är (a,b) inte en extrempunkt.

Bevis: Bevisar senare en allmännare sats.

Anmärkning: Sats 47 ger tillräckliga villkor för lokala extrempunkter. Satsen säger inget om fallet $AC - B^2 = 0$.

Exempel 81. För $f(x,y) = x^4 + y^4$ är alla partiella derivator av ordning två noll i origo, $AC - B^2 = 0$. Tydligen är $(0,0)$ en lokal och global minimipunkt för f.

Exempel 82. Betrakta funktionen $f(x,y) = x e^{-x^2-y^2}$ från Exempel 78. Vi bestämmer de stationära punkterna i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-2x^2)\, e^{-x^2-y^2} = 0 \\ -2xy\, e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ och $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ stationära punkter

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = 2x(2x^2-3)\, e^{-x^2-y^2}, \quad f''_{yy}(x,y) = 2x(2y^2-1)\, e^{-x^2-y^2}, \\ f''_{xy}(x,y) = 2y(2x^2-1)\, e^{-x^2-y^2}. \end{cases}$$

1°) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$: $\begin{cases} A = f''_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 2\sqrt{\frac{2}{e}}, \quad B = f''_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 0, \\ C = \sqrt{\frac{2}{e}} = f''_{yy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \end{cases}$

$\therefore$ $AC - B^2 = \frac{4}{e} > 0$, $A > 0$. Sats 47:

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$ strängt lokalt minimum.

2°) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$: $A = f''_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -2\sqrt{\frac{2}{e}}$, $B = f''_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 0$, $C = f''_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\sqrt{\frac{2}{e}}$.

$\therefore$ $AC - B^2 = \frac{4}{e} > 0$, $A < 0$. Sats 47:

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ strängt lokalt maximum.

Exempel 83. Undersök vilka lokala extremvärden funktionen $f(x,y) = (x-y)^2 - x^4 - y^4$ har.

Lösning: De stationära punkterna är lösningar till:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y) - 4x^3 = 0 \\ -2(x-y) - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Addition av ekvationerna ger:

$$0 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)((x-y)^2 + xy).$$

Den sista parentesen är noll endast för $x = y = 0$, vilket ger att $y = -x$ löser ekvationen. Insättning av detta i den första ekvationen ger:

$$x - x^3 = 0 \iff (x = 0 \text{ eller } x = \pm 1).$$

Stationära punkter: $(0,0)$, $(1,-1)$ och $(-1,1)$.

$f''_{xx}(x,y) = 2 - 12x^2$, $f''_{xy}(x,y) = -2$, $f''_{yy}(x,y) = 2 - 12y^2$.

1°) $(1,-1)$: $AC - B^2 = (-10)(-10) - 4 = 96$, $A < 0$

$\therefore$ $f(1,-1) = 2$ är ett lokalt maximum.

2°) $(-1,1)$: $AC - B^2 = (-10)(-10) - 4 = 96$, $A < 0$

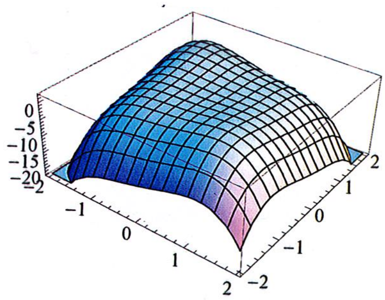
$\therefore$ $f(-1,1) = 2$ är ett lokalt maximum.

3°) $(0,0)$: $AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-2)^2 = 0$. Sats 47 säger inget.

$f(x,0) = x^2 - x^4 = x^2(1-x^2)$ lokalt minimum för $x = 0$.

$f(0,y) = y^2 - y^4$ lokalt minimum för $y = 0$.

$f(x,x) \begin{cases} < 0, & \text{för } x \neq 0 \\ = 0, & \text{för } x = 0 \end{cases}$



$\therefore$ $(0,0)$ ingen lokal extrempunkt.

Lokala extremvärden för avbildningar $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Om $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning ≥ 3 i en omgivning av punkten $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, så har vi ett lokalt extremvärde i $\bar{a}$ endast om $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$. Taylorutvecklingen kring $\bar{a}$ blir då

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2} p(\bar{h}) + O(|\bar{h}|^3), \quad \bar{h} = \bar{x} - \bar{a},$$

där

$$p(\bar{h}) = d^2 f(\bar{a}) = \bar{h}^T H_f \bar{h}, \quad H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) \right)_{i,j=1}^{n},$$

som är en kvadratisk form i n variabler $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_n)^T$ och koefficienter givna av elementen i Hessematrisen H_f.

Då $O(|\bar{h}|^3) \approx 0$ i en "liten" omgivning av $\bar{a}$ kan $p(\bar{h})$ utnyttjas för att undersöka om f har ett strängt lokalt extremvärde i punkten $\bar{a}$.

Definition 30. En form $p(h)$ av graden k sägs vara:

1°. Positivt definit, om $p(\bar{h}) \geq 0$ med likhet endast om $\bar{h} = \bar{0}$, dvs. p har ett strängt minimum för $\bar{h} = \bar{0}$.

2°. Negativt definit, om $p(\bar{h}) \leq 0$ med likhet endast om $\bar{h} = \bar{0}$, dvs. p har ett strängt maximum för $\bar{h} = \bar{0}$.

3°. Positivt semidefinit, om $p(\bar{h}) \geq 0$ med likhet även för vissa $\bar{h} \neq \bar{0}$, dvs. p har ett osträngt minimum för $\bar{h} = \bar{0}$.

4°. Negativt semidefinit, om $p(\bar{h}) \leq 0$ med likhet även för vissa $\bar{h} \neq \bar{0}$, dvs. p har ett osträngt maximum för $\bar{h} = \bar{0}$.

5°. Indefinit, om $p(\bar{h}) > 0$ för vissa $\bar{h}$ och $p(\bar{h}) < 0$ för andra $\bar{h}$, dvs. p har ingen extrempunkt för $\bar{h} = \bar{0}$.

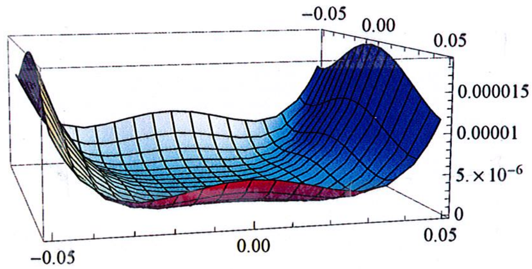
Exempel 84. Funktionen

$$f(x,y) = (x^2-y^2)^2 + 2y^4 - 3x^5 = P_4(x,y) + \mathcal{O}(r^5),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2};$$

där

$$P_4(x,y) = (x^2-y^2)^2 + 2y^4 = x^4 - 2x^2y^2 + 3y^4.$$

är en form av graden 4. Tydligen är $P_4 \geq 0$ och $P_4 = 0 \iff y=0 \wedge (x^2-y^2)=0 \iff (x,y)=(0,0)$. Då är P_4 positivt definit med origo som sträng minimipunkt. Detta gäller även $f(x,y)$:



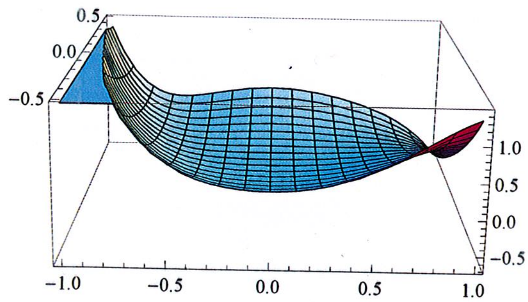
Exempel 85. Låt

$$f(x,y) = (x^2-y)^2 + y^4 - x^5 = P_4(x,y) + \mathcal{O}(r^5),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

Här är $P_4(x,y) = (x^2-y)^2 + y^4 = y^2 - 2x^2y + x^4 + y^4$, ett polynom av graden 4 men inte en form av graden 4.
Igen är $P_4 \geq 0$ med $P_4 = 0 \iff (x,y)=(0,0)$, så origo är en sträng minipunkt för P_4, men inte för $f(x,y)$:

$$f(x,y) \underset{y=x^2}{=} f(x,x^2) = x^5(x^3-1)\begin{cases} <0, & 0<x<1 \\ >0, & -1<x<0 \end{cases}$$

$\therefore$ $f(x,y)$ antar positiva och negativa värden i varje omgivning av $(0,0)$.



Lemma. Om $P_k(\bar{h})$ är en form av graden k, så är funktionen

$$g(\bar{h}) = \frac{P_k(\bar{h})}{|\bar{h}|^k}$$

konstant på strålarna $t\bar{h}$, $t>0$, utgående från origo. Om P_k är positivt definit, så har funktionen g ~~ett~~ minsta värde $c>0$.

Bevis: För alla $t>0$ gäller:

$$g(t\bar{h}) = \frac{P_k(t\bar{h})}{|t\bar{h}|^k} = \frac{t^k P_k(\bar{h})}{t^k |\bar{h}|^k} = g(\bar{h}).$$

Då är g konstant på strålen $t\bar{h}$, $t>0$. Därmed antas alla värden för g på "enhetssfären" $|\bar{h}|=1$, som är en sluten och begränsad mängd, dvs. kompakt. Då g är kontinuerlig på denna kompakta mängd antar den ett minsta värde c. Om P_k är positivt definit, så måste $c>0$, ty $P_k \geq 0$, med $P_k = 0$ endast för $\bar{h}=0$, som inte ligger på sfären. □

Med hjälp av lemmat kan vi bevisa ~~att~~ tillräckligt villkor för extremvärden i följande sats, som behandlar former av graden k, (kvadratiska formerna med $k=2$ blir ett specialfall).

Sats 42. Om

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + P_k(\bar{h}) + \mathcal{O}(|\bar{h}|^{k+1}), \quad \bar{h} = \bar{x} - \bar{a},$$

där $P_k(\bar{h})$ är en form av graden k, så har $f(\bar{x})$ i punkten $\bar{x} = \bar{a}$!

1°. Ett strängt lokalt minimum, om $P_k(\bar{h})$ är positivt definit.

2°. Ett strängt lokalt maximum, om $P_k(\bar{h})$ är negativt definit.

3°. Inget extremvärde, om $P_k(\bar{h})$ är indefinit.

Bevis: 1°. Antag att $P_k(\bar{h})$ är positivt definit (analogt bevis för det negativt definita fallet). För $\bar{h} \neq \bar{0}$ kan vi forma om uttrycket för $f(\bar{x})$:

$$\frac{f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a})}{|\bar{h}|^k} = \frac{P_k(\bar{h})}{|\bar{h}|^k} + \mathcal{O}(|\bar{h}|).$$

Vårt lemma ger, då P_k är positivt definit, att

$$g(\bar{h}) = \frac{P_k(\bar{h})}{|\bar{h}|^k} \geq c > 0, \quad \text{för } \bar{h} \neq \bar{0}.$$

Då $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \mathcal{O}(|\bar{h}|) = 0$, så är $\mathcal{O}(|\bar{h}|) \geq -\frac{c}{2}$ i någon omgivning av $\bar{h} = \bar{0}$. I denna omgivning gäller:

$$\frac{f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a})}{|\bar{h}|^k} = g(\bar{h}) + \mathcal{O}(|\bar{h}|) \geq c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} > 0,$$

vilket innebär att $f(\bar{a}+\bar{h}) > f(\bar{a})$ för alla $\bar{h} \neq \bar{0}$ i en omgivning av $\bar{h} = \bar{0}$, så $\bar{a}$ är en sträng lokal minimipunkt.

(Bevis av Sats 42):

$\boxed{2^\circ}$ Antag nu ~~att~~ $P_k(\bar{h})$ är indefinit. Då existerar två vektorer $\bar{h}_+$ respektive $\bar{h}_-$, sådana ~~att~~

$$P_k(\bar{h}_+) > 0 > P_k(\bar{h}_-),$$

I analogi med beviset i fall $\boxed{1^\circ}$ får vi

$$\begin{cases} \dfrac{f(\bar{a}+t\bar{h}_+)-f(\bar{a})}{|t\bar{h}_+|^k} = g(t\bar{h}_+) + O(|t\bar{h}_+|) = g(\bar{h}_+) + O(|t|) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \geq \dfrac{g(\bar{h}_+)}{2} > 0, \\ \dfrac{f(\bar{a}+t\bar{h}_-)-f(\bar{a})}{|t\bar{h}_-|^k} = g(t\bar{h}_-) + O(|t\bar{h}_-|) = g(\bar{h}_-) + O(|t|) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq \dfrac{g(\bar{h}_-)}{2} < 0, \end{cases}$$

för tillräckligt små t-värden, dvs. $f(\bar{a}+t\bar{h}_+) > f(\bar{a})$ och $f(\bar{a}) > f(\bar{a}+t\bar{h}_-)$ för dessa t-värden, vilket ger ~~att~~ $\bar{a}$ inte är någon extrempunkt. $\square$

För att bevisa Sats 41 med hjälp av Sats 42 behöver vi speciellt studera kvadratiska former i följande avsnitt.

Kvadratkomplettering av kvadratiska former

Tillämpning av Sats 42 förutsätter att man kan bedömma om en form av graden K är definit, (positivt eller negativt), eller indefinit. För våra tillämpningar är de kvadratiska formerna ($K=2$) viktigaste. Låt oss titta på fallet med två variabler. Om $A \neq 0$ kan vi kvadratkomplettera enligt:

$$P(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = A\left[\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A^2}k^2\right].$$

Följande observationer kan göras:

- Om $AC - B^2 > 0$, så är uttrycket inom klammern ≥ 0 för alla (h,k) och $P = 0$ endast om $(h,k) = (0,0)$. Formen är definit, positivt om $A > 0$, negativt om $A < 0$.
- Om $AC - B^2 < 0$, så är uttrycket inom klammern > 0 för alla punkter $(h,0)$, $h \neq 0$, och < 0 för alla punkter på linjen $(Bh, -Ah)$ genom origo, ty uttrycket är då $= (AC - B^2)h^2 < 0$. Formen är då indefinit.
- Om $AC - B^2 = 0$, så är uttrycket inom klammern $\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 \geq 0$ för alla (h,k) och $P = 0$ på alla punkter på linjen $(Bh, -Ah)$. Då är formen semidefinit, positivt om $A > 0$ och negativt om $A < 0$.

Om $A=0$ har formen utseendet

$$p(h,k) = 2Bhk + Ck^2 = k(2Bh + Ck),$$

- Om $B \neq 0$, så växlar uttrycket tecken då k växlar tecken, (och h är fixt), så uttrycket är indefinit. $AC - B^2 = -B^2 < 0$ i detta fall.
- Om $B = 0$, så är $p(h,k) = Ck^2$ som är semidefinit, $p(h,0) = 0$, och $AC - B^2 = 0$.

Vi sammanfattar utredningarna i en sats:

Sats 43. Den kvadratiska formen

$$p(h,k) = A^2 + 2Bhk + Ck^2$$

är:

1° Positivt definit, om $AC - B^2 > 0$ och $A > 0$.

2° Negativt definit, om $AC - B^2 > 0$ och $A < 0$.

3° Indefinit, om $AC - B^2 < 0$.

4° Positivt semidefinit, om $AC - B^2 = 0$ och $A > 0$.

5° Negativt semidefinit, om $AC - B^2 = 0$ och $A < 0$.

Sats 42 och Sats 43 ger nu tillsammans att Sats 41 gäller.

Att undersöka om en kvadratisk form av fler än två variabler är definit eller indefinit kan göras genom att skriva om formen till en linjär kombination av jämna kvadrater medelst kvadratkomplettering. Förfarandet beskrivs med två exempel.

Exempel 86. Betrakta kvadratiska formen av h, k och l:

$$P(h,k,l) = 2h^2 + 5(k-l)^2 + al^2 + 4hk - 4hl,$$

där a är en konstant. Vi gör följande omskrivningar:

$$P(h,k,l) \overset{1.}{=} 2h^2 + 5k^2 - 10kl + (5+a)l^2 + 4hk - 4hl$$

$$\overset{2.}{=} 2\underline{\underline{h}}^2 + 5k^2 - 10kl + (5+a)l^2 + 4\underline{h}k - 4\underline{h}l$$

$$\overset{3.}{=} \underbrace{2[(h+k-l)^2 - (k-l)^2]}_{2h^2+4hk-4hl} + 5k^2 - 10kl + (5+a)l^2$$

$$= 2(h+k-l)^2 - 2k^2 + 4kl - 2l^2 + 5k^2 - 10kl + (5+a)l^2$$

$$= 2(h+k-l)^2 + 3\underline{\underline{k}}^2 - 6\underline{k}l + (3+a)l^2$$

$$= 2(h+k-l)^2 + \underbrace{3[(k-l)^2 - l^2]}_{3k^2-6kl} + (3+a)l^2$$

$$= 2(h+k-l)^2 + 3(k-l)^2 + al^2.$$

1. Utveckla till linjär kombination av olika monom. ($ch^\alpha k^\beta l^\gamma$ = monom)
2. Finn variabel vars kvadrat är en av termerna.
3. Samla alla termer med variabeln i en jämn kvadrat.
4. Upprepa förfarandet med de övriga variablerna.

1.) Om $a > 0$ så är $p \geq 0$ med likhet om:

$$\begin{cases} h+k-l=0 \\ k-l=0 \\ l=0 \end{cases} \Leftrightarrow (h,k,l) = (0,0,0).$$

Formen är då positivt definit.

$$P(h,k,l) = 2(h+k-l)^2 + 3(k-l)^2 + al^2.$$

2. Om $\underline{a<0}$ har vi för $k=l=0$ att

$$p = 2h^2 > 0, \text{ då } h \neq 0$$

På linjen $(0,k,k)$ är $p = ak^2 < 0$, då $k \neq 0$.
<u>Formen är därmed indefinit.</u>

3. Om $\underline{a=0}$ är $p = 2(h+k-l)^2 + 3(k-l)^2 \geq 0$, med likhet då $\begin{cases} h+k-l=0 \\ k-l=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h=0 \\ k=l \end{cases}$, dvs. på linjen $(0,k,k)$. <u>Formen är då positivt semidefinit.</u>

I sådana fall där man vid tillämpning av ovanbeskrivna algoritm <u>inte hittar någon term med en kvadrerad variabel bland de kvarvarande variablerna är formen alltid indefinit.</u>

<u>Exempel 87.</u> Betrakta p given av

$$p(h,k,l) = 2\underline{h}^2 + 2k^2 + 2l^2 + 4\underline{h}k - 4\underline{h}l - 7kl$$
$$= 2[(h+k-l)^2 - (k-l)^2] + 2k^2 + 2l^2 - 7kl$$
$$= 2(h+k-l)^2 - 3kl.$$

Här avslutas algoritmen. Väljer man (h,k,l) så ~~att~~ $h+k-l=0$ så är $p=-3kl$, så $p>0$ om $k=-l$ och $p<0$ om $k=l$. <u>Formen är indefinit.</u>

Uttolkningen av algoritmens slutresultat ges i följande Sats.

Sats 44. Om $p(h)$ är en kvadratisk form i n variabler och om algoritmen beskriven i Ex. 86 leder till en linjär kombination av:

1° n jämna kvadrater med positiva koefficienter, så är p positivt definit.

2° n jämna kvadrater med negativa koefficienter, så är p negativt definit.

3° $< n$ jämna kvadrater med positiva koefficienter, så är p positivt semidefinit.

4° $< n$ jämna kvadrater med negativa koefficienter, så är p negativt semidefinit.

5° $\leq n$ jämna kvadrater där någon koefficient > 0 och någon koefficient < 0, så är p indefinit.

Om algoritmen inte ger en linjär kombination av jämna kvadrater, (som i Ex. 87), så är p indefinit.

Exempel 88. Avgör om $f(x,y,z) = 4\cos(x+y+z) + 7(xy+yz+zx)$ har ett lokalt extremvärde i origo.

Lösning: Maclaurinutveckling av f ger:

$$f(x,y,z) = 4\left(1 - \frac{(x+y+z)^2}{2} + \mathcal{O}(|x+y+z|^4)\right) + 7(xy+yz+zx)$$

$$= 4 - (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3xy - 3yz - 3zx) + \mathcal{O}(r^4),$$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$\nabla f(0,0,0) = \bar{0}$, origo stationär punkt!

förstagradstermer saknas.

Vi undersöker andragradsformen:

$$p(h,k,l) = -2h^2 - 2k^2 - 2l^2 + 3hk + 3kl + 3lh$$

Kvadratkomplettering ger:

$$-\frac{p(h,k,l)}{2} = \left(h - \frac{3}{4}k - \frac{3}{4}l\right)^2 - \frac{9}{16}(k+l)^2 + k^2 + l^2 - \frac{3}{2}kl$$

$$= \left(h - \frac{3}{4}k - \frac{3}{4}l\right)^2 + \frac{7}{16}\left(k^2 + l^2 - 6kl\right)$$

$$= \left(h - \frac{3}{4}k - \frac{3}{4}l\right)^2 + \frac{7}{16}(k-3l)^2 - \frac{7}{16}\cdot 8l^2$$

Kvadraterna har koefficienter av olika tecken. Då ger Sats 44 punkt 5°) att p är indefinit och funktionen har enligt Sats 42 punkt 3°) inget extremvärde i origo.

Anmärkning. För kvadratiska former av två variabler är det oftast enklare att använda Sats 41 istället för Sats 44.