Flerdimensionell analys. Slutförhör 23.5.2016

1. Definiera följande begrepp: a) Inre punkt och randpunkt till en mängd M i $\mathbb{R}^n$, b) Öppen mängd och sluten mängd i $\mathbb{R}^n$, c) Riktningsderivata för en avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. (3p)

   d) Hur lyder Greens formel och under vilka antaganden gäller den? (3p)

2. Undersök om gränsvärde existerar då $(x, y) \to (0, 0)$ för:

   a) $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$,

   b) $g(x, y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y)^2}$.

3. Bestäm talet d så att planet $x + y + z = d$ tangerar hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

4. Beräkna det största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2y - 3xy + 2x - 4y$ på rektangelytan $D = \{(x, y) : |x| \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$.

5. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma (e^{x+y} - y)\, dx + (e^{x+y} - 1)\, dy,$$

   där Γ är den övre halvcirkelbågen av cirkeln $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ i första kvadranten, genomlöpt från origo till punkten $(1, 0)$.

Flerdimensionell analys, slutförhör, 23.5.2016

1. Se föreläsningsanteckningar.

2. a) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$, $(x,y) \to (0,0)$

Sätt: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $(x,y) \to (0,0) \iff r \to 0$

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \left| \frac{r^3 \cos^3\theta\, r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} \right| = \left| \frac{r^4 \cos^3\theta \sin\theta}{r^2} \right|$$

$$= r^2 \underbrace{|\cos^3\theta \cdot \sin\theta|}_{\leq 1,\ \forall \theta}$$

$\leq r^2$, för alla $\theta \in [0, 2\pi]$.

$\to 0$, då $r \to 0$.

$\therefore$ $f(x,y) \to 0$, då $(x,y) \to (0,0)$

b) $g(x,y) = \dfrac{x^2 y}{(x^2+y)^2}$

1°) gränsvärde längs x-axel, $y = 0$!

$g(x,0) = 0 \to 0$, då $x \to 0$

2°) gränsvärde längs parabeln $y = x^2$!

$g(x,x^2) = \dfrac{x^4}{4x^4} = \dfrac{1}{4} \to \dfrac{1}{4}$, då $x \to 0$

$\therefore$ 1°) och 2°) ger att gränsvärde saknas då $(x,y) \to (0,0)$.

3.| Bestäm talet d så att planet $x+y+z = d$ tangerar hyperboloiden $x^2+y^2-z^2=1$.

Lösning: Sätt $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$.

hyperboloiden är då nivåytan $f(x,y,z) = 1$ till f.

I tangeringspunkten (x,y,z) gäller det att $\text{grad} f = (2x, 2y, -2z)$ är parallell med normalvektorn $\bar{n}=(1,1,1)$ till planet.

Det finns då ett tal k så att:

$$(2x, 2y, -2z) = k\cdot(1,1,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k \\ 2y = k \\ -2z = k \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x = \frac{k}{2},\ y = \frac{k}{2},\ z = -\frac{k}{2}}.$$

Tangeringspunkten ligger på hyperboloiden,

så $f(x,y,z) = 1 \Leftrightarrow \frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{4} = 1$

$$\Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = \pm 2}}.$$

Då kan vi bestämma d:

$$\underline{\underline{d}} = x+y+z = \frac{k}{2}+\frac{k}{2}-\frac{k}{2} = \frac{k}{2} = \underline{\underline{\pm 1}}$$

Svar: $d = 1$ eller $d = -1$.

4.| Se räkneövningarna vecka 14.

5.| Se demonstrationerna vecka 17.