Demonstrationer i FDA, vecka 13

1] Bestäm lokala extremvärden till $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y$.

Stationära punkter:
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 + 2xy = 5 \end{cases} \overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = \frac{5 - y^2}{2y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(5-y^2)^2}{4y^2} + y^2 = 5 \\ x = \frac{5-y^2}{2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^4 - 10y^2 + 25 = 20y^2 \\ x = \frac{5-y^2}{2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{6 \pm 4}{2} \\ x = \frac{5-y^2}{2y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y = \sqrt{5} \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\sqrt{5} \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 \end{cases} \right)$$

$f''_{xx} = 6x$, $f''_{yy} = 6y + 6x$, $f''_{yx} = f''_{xy} = 6y$ Sats 41:

1°] $(0, \sqrt{5})$: $AC - B^2 = 0 - 36 \cdot 5 < 0$. Inte lokal extrempunkt.

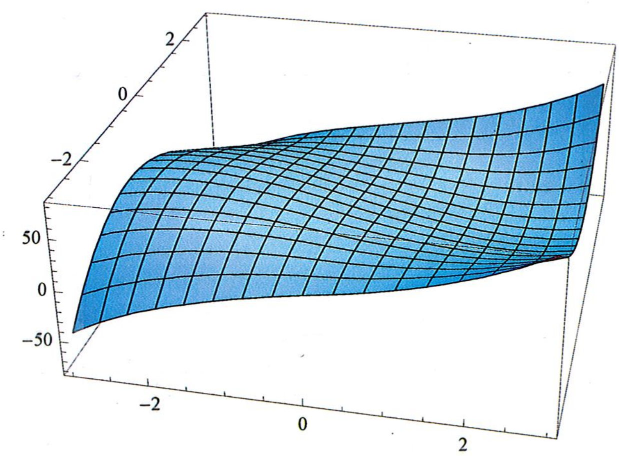
2°] $(0, -\sqrt{5})$: $AC - B^2 = 0 - 36 \cdot 5 < 0$. Inte lokal extrempunkt.

3°] $(2, 1)$: $AC - B^2 = 12 \cdot 18 - 36 > 0$. Lokal extrempunkt.

$\therefore$ $f(2,1) = -30$, Strängt lokalt minimum, $A = f''_{xx} = 12 > 0$.

4°] $(-2, -1)$: $AC - B^2 = 12 \cdot 18 - 36 > 0$. Lokal extrempunkt.

$\therefore$ $f(-2,-1) = 30$, Strängt lokalt maximum, $A = f''_{xx} = -12 < 0$.

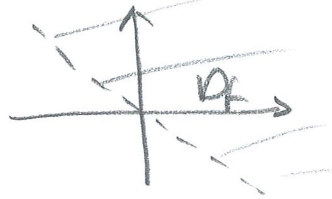


2] Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionerna

a) $f(x,y) = \ln(x+y) - x^2 - y^2$,

b) $f(x,y) = \sin^2 x - (x-y)^2$.

a) Definitionsmängd: $D_f = \{(x,y) : y > -x\}$
öppen mängd.



$\therefore$ (x,y) extrempunkt $\Rightarrow$ $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 2x \\ \dfrac{1}{x+y} = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \dfrac{1}{2x} = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1/2 \\ y = x \end{cases}$$

$\therefore$ $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ enda stationära punkten i D_f.

Sats 41: $f''_{xx} = -\dfrac{1}{(x+y)^2} - 2$, $f''_{xy} = -\dfrac{1}{(x+y)^2}$, $f''_{yy} = -\dfrac{1}{(x+y)^2} - 2$.

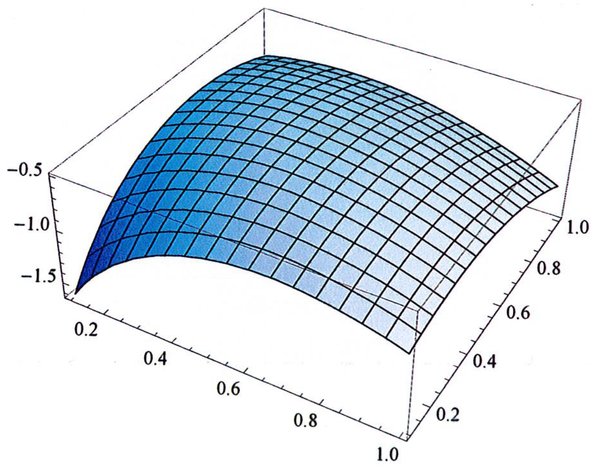
$A = f''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -3$, $B = f''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -1$, $C = f''_{yy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -3$.

$\therefore$ $AC - B^2 = 9 - (-1)^2 = 8 > 0$ och $A < 0$,

$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ strängt lokalt maximum.

In[457]:= `Plot3D[Log[x + y] - x^2 - y^2, {x, 0.1, 1}, {y, 0.1, 1}, PlotRange → All]`

Out[457]=



2 b) $f(x,y) = \sin^2 x - (x-y)^2$.

f har kontinuerliga partiella derivator i $\mathbb{R}^2$, bestämmer stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \overbrace{2\sin x \cos x}^{\sin 2x} - 2(x-y) = 0 \\ 2(x-y) = 0 \end{cases} \iff x = y = n\cdot\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

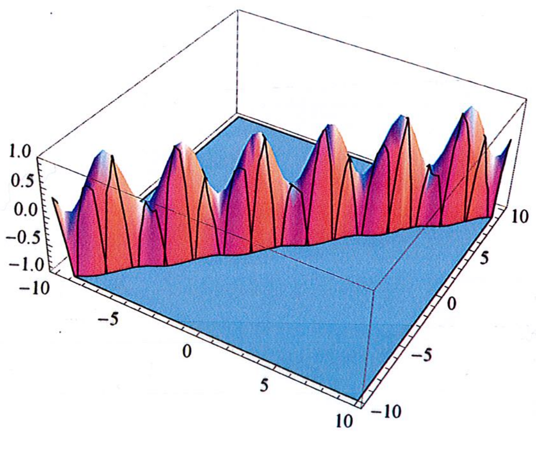
Stationära punkter: $\left(n\frac{\pi}{2}, n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} f''_{xx} = \frac{d}{dx}\left(\sin 2x - 2(x-y)\right) = 2\cos 2x - 2 \\ f''_{xy} = f''_{yx} = 2,\quad f''_{yy} = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} A = f''_{xx}\left(n\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos n\pi - 2 = \begin{cases} 0, & n \text{ jämn}, \\ -4, & n \text{ udda}, \end{cases} \\ B = f''_{xy}\left(n\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2}\right) = 2,\quad C = f''_{yy}\left(n\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2}\right) = -2 \end{cases}$$

1°) Om n är jämn är $AC - B^2 = 0 - 4 = -4 < 0$
$\left(n\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2}\right)$ inte lokal extrempunkt (Sats 47)

2°) Om n är udda är $AC - B^2 = (-4)(-2) - 4 = 4 > 0$, och $A = -4 < 0$,
$\left(n\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2}\right)$ sträng lokal maximipunkt. (Sats 47)



3. Undersök om följande kvadratiska former är definita / indefinita / semidefinita.

a) $p(h,k,\ell) = 3h^2+2k^2+2\ell^2+4hk+4h\ell+2k\ell$,

b) $p(h,k,\ell) = h^2+k^2+\ell^2-2hk+2h\ell+2k\ell$.

a) Tillämpar algoritmen i Ex. 86:

$$\begin{aligned} p(h,k,\ell) &= 3\underline{\underline{h}}^2+2k^2+2\ell^2+4\underline{h}k+4\underline{h}\ell+2k\ell \\ &= 3\left(h^2+\tfrac{4}{3}h(k+\ell)+\left(\tfrac{2}{3}(k+\ell)\right)^2\right) \\ &\quad -\tfrac{4}{3}(k+\ell)^2+2k^2+2\ell^2+2k\ell \\ &= 3\left(h+\tfrac{2}{3}(k+\ell)\right)^2-\tfrac{4}{3}\underline{\underline{k}}^2-\tfrac{4}{3}\ell^2-\tfrac{8}{3}\underline{k}\ell+2\underline{\underline{k}}^2+2\ell^2+2\underline{k}\ell \\ &= 3\left(h+\tfrac{2}{3}(k+\ell)\right)^2+\tfrac{2}{3}\left(k^2-k\ell+\left(\tfrac{\ell}{2}\right)^2\right)-\tfrac{1}{6}\ell^2+\tfrac{2}{6}\ell^2 \\ &= 3\left(h+\tfrac{2}{3}(k+\ell)\right)^2+\tfrac{2}{3}(k-\ell/2)^2+\tfrac{1}{6}\ell^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ $p(h,k,\ell)$ är positivt definit, Sats 44, 1°.

b) Algoritmen i Ex 86:

$$\begin{aligned} p(h,k,\ell) &= \underline{\underline{h}}^2+k^2+\ell^2-2\underline{h}k+2\underline{h}\ell+2k\ell \\ &= \left(h^2-2h(k-\ell)+(k-\ell)^2\right)-(k-\ell)^2+k^2+\ell^2+2k\ell \\ &= (h-(k-\ell))^2-k^2-\ell^2+2k\ell+k^2+\ell^2+2k\ell \\ &= (h-(k-\ell))^2+4k\ell \end{aligned}$$

$\therefore$ Inte en linjär kombination av jämna kvadrater.

$\therefore$ $P(h,k,\ell)$ är indefinit, Sats 44.

4.) Bestäm alla extrempunkter till funktionen

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-6xy+8xz-z^3.$$

Stationära punkter: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6y+8z=0 \\ 2y-6x=0 \\ 2z+8x-3z^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2x \\ y = 3x \end{cases}$

Sätt in $z=2x$ i (3): $4x+8x-12x^2=0 \Leftrightarrow 12x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$.

$\therefore$ $(0,0,0)$ och $(1,3,2)$ stationära punkter.

1°) $(0,0,0)$. $f(x,y,z) = \underbrace{x^2+y^2+z^2-6xy+8xz}_{P_2} + O(r^3)$

$$P_2(h,k,l) = h^2+k^2+l^2-6hk+8hl = (k-3h)^2 \underbrace{-9h^2+h^2+8hl+l^2}_{-8h^2+8hl+l^2}$$
$$= (k-3h)^2+(l+4h)^2\underbrace{-16h^2-8h^2}_{=-24h^2}$$

Sats 44: P_2 indefinit, Sats 42: $(0,0,0)$ ej lokal extrempunkt för f.

2°) $(1,3,2)$. Sätt: $x=1+h$, $y=3+k$, $z=2+l$.

$$f(x,y,z) = (1+h)^2+(3+k)^2+(2+l)^2-6(1+h)(3+k)+8(1+h)(2+l)-(2+l)^3$$
$$= 4+\underbrace{h^2-6hk+k^2+8hl-5l^2}_{P_2(h,k,l)} - l^3 \quad O(r^3)$$

$$P_2(h,k,l) = h^2-6hk+k^2+8hl-5l^2 = (h-3k+4l)^2 \underbrace{-9k^2-16l^2}_{+24kl}+k^2-5l^2$$
$$= (h-3k+4l)^2-8k^2+24kl-21l^2$$
$$= (h-3k+4l)^2-8(k-\tfrac{3}{2}l)^2+18l^2-21l^2$$
$$= (h-3k+4l)^2-8(k-\tfrac{3}{2}l)^2-3l^2$$

Sats 44: P_2 indefinit, Sats 42: $(1,3,2)$ ej lokal extrempunkt för f.

(6)

5) Undersök om $f(x,y,z) = \cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \sin z$ har ett lokalt extremvärde i origo.

Lösning: $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)$, $\sin t = t + O(t^3)$

$$f(x,y,z) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(r^4)\right)\left(1 - \frac{y^2}{2} + O(r^4)\right)\left(1 - \frac{z^2}{2} + O(r^4)\right)$$
$$- \left(x + O(r^3)\right)\left(y + O(r^3)\right)\left(z + O(r^3)\right)$$
$$= 1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}}_{P_2} + O(r^3).$$

Sätt: $x = h$, $y = k$, $z = l$

$$P_2(h,k,l) = -\frac{1}{2}\cdot h^2 - \frac{1}{2}\cdot k^2 - \frac{1}{2}\cdot l^2$$

Sats 44: P_2 negativt definit.

Sats 42: $f(0,0,0) = 1$ ett strängt lokalt maximum.