Demonstrationer i FDA, vecka 9

1. Visa att ytorna $x^2+y^2-z^2=2$ och $x+y=2e^z$ i en omgivning av $(1,1,0)$ har en skärningskurva som kan skrivas $(x, y(x), z(x))$ med två deriverbara funktioner $y(x)$ och $z(x)$. Bestäm skärningskurvans tangentriktning i $(1,1,0)$.

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-2 = 0, \\ G(x,y,z) = x+y-2e^z = 0. \end{cases}$$

1° $F(1,1,0) = 0 = G(1,1,0)$

2° F, G har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av $(1,1,0)$

3° $\dfrac{d(F,G)}{d(y,z)} = \begin{vmatrix} 2y & -2z \\ 1 & -2e^z \end{vmatrix} = -4ye^z + 2z = -4 \neq 0$ i $(1,1,0)$.

$\Longleftarrow$

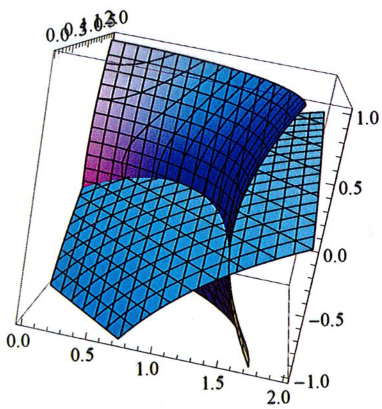
Sats 30: Skärningskurvan ges av $(x, y(x), z(x))$ med två deriverbara funktioner $y(x), z(x)$.

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \cdot y'(x) + F'_z \cdot z'(x) = 0 \\ G'_x + G'_y \cdot y'(x) + G'_z \cdot z'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y \cdot y'(x) - 2z \cdot z'(x) = 0 \\ 1 + y'(x) - 2e^z \cdot z'(x) = 0 \end{cases}$$

Tangentriktningen i $(1,1,0)$ är: $(1, y'(1), z'(1))$

$$\begin{cases} 2 + 2y'(1) = 0 \\ 1 + y'(1) - 2z'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = -1 \\ z'(1) = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ Tangentriktning: $(1,-1,0)$.



2.| Förenkla derivatan av $I(x)$ så långt som möjligt då $I(x) = \int_0^{1/x} \frac{\arctan xt}{t}\, dt$.

Tillämpar Sats 33 med $D = \{(x,t) : 0 < a \le x \le b,\ 0 \le t \le d\}$

Sätt $\begin{cases} f(x,t) = \dfrac{\arctan xt}{t}, & t > 0 \\ f(x,0) := \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\arctan xt}{t} = \lim\limits_{t \to 0^+} x \cdot \dfrac{\arctan xt}{xt} = x \end{cases}$

$\left(\begin{array}{l} xt = \tan(xs) \quad t \to 0^+ \Leftrightarrow s \to 0^+ \\ \dfrac{\arctan xt}{xt} = \dfrac{xs}{\tan xs} \xrightarrow[s \to 0^+]{} 1 \end{array} \right)$

$f'_x(x,t) = \dfrac{1}{1 + x^2 t^2}$.

f, f'_x kontinuerliga på D, $\alpha(x) \equiv 0$, $\beta(x) = 1/x$ deriverbara med värden i $[0,d]$.

$$I'(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{1+x^2t^2}\, dt + \overbrace{\frac{\arctan(1)}{1/x}}^{f(x,1/x)} \cdot \overbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}^{\beta'(x)} - \overbrace{x}^{f(x,0)} \cdot \overbrace{0}^{\alpha'(x)}$$

$$= \left[\frac{1}{x} \arctan xt\right]_0^{1/x} - \frac{1}{x}\arctan(1)$$

$$= \frac{1}{x}\arctan(1) - \frac{1}{x}\arctan 0 - \frac{1}{x}\arctan(1)$$

$$= 0$$

Svar: $I'(x) = 0$.

$\left(I(x) \approx 0{,}915966 \right)$

$\quad \parallel$

$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots$

3. Transformera differentialekvationen

$$x f'_y - y f'_x = \frac{1}{x^2}, \quad x>0,$$

genom att införa polära koordinater i planet. Ange någon lösning till ekvationen

Sätt: $f(x,y) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$, $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, r>0$

$$\begin{cases} f'_r = f'_x \cdot \cos\theta + f'_y \cdot \sin\theta \\ f'_\theta = f'_x \cdot \underbrace{(-r\sin\theta)}_{-y} + f'_y \underbrace{(r\cos\theta)}_{x} \end{cases}$$

$\therefore$ I polära koordinaten kan vi skriva ekvationen:

$$f'_\theta(r,\theta) = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{r^2\cos^2\theta}$$

$\therefore$ En lösning ges av: $f(r,\theta) = \frac{1}{r^2} \cdot \tan\theta$

Lösning till den ursprungliga ekvationen:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \tan\theta = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{x},$$

$\therefore$ $f(x,y) = \frac{y}{x(x^2+y^2)}$ en lösning till

$$x f'_y - y f'_x = \frac{1}{x^2}, \quad x>0.$$

4. Ange derivatans nollställen till funktionen

$$f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{-xt^2}}{t}\,dt .$$

Tillämpar Sats 33 med $D = \{(x,t) : 0 < a \le x \le b,\ 0 < c \le t \le d\}$

Sätt: $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{t}$, $f'_x(x,t) = -t e^{-xt^2}$.

f, f'_x kontinuerliga på D.

$\alpha(x) \equiv 1$, $\beta(x) = \sqrt{x}$ deriverbara med värden i $[c,d]$.

$$f'(x) = \int_1^{\sqrt{x}} -t e^{-xt^2}\,dt + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \cdot \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{\beta'(x)} - e^{-x} \cdot \overbrace{0}^{\alpha'(x)}$$

$$= \left[\frac{1}{2x} e^{-xt^2}\right]_1^{\sqrt{x}} + \frac{e^{-x^2}}{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{2x}\left(2e^{-x^2} - e^{-x}\right)}}$$

$$f'(x) = 0 \iff 2e^{-x^2} = e^{-x} \quad \Big| \cdot e^x$$
$$\iff 2e^{x-x^2} = 1$$
$$\iff e^{x-x^2} = \frac{1}{2} \quad \Big| \ln$$
$$\iff x - x^2 = -\ln 2$$
$$\iff x^2 - x - \ln 2 = 0$$
$$\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\ln 2}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \ln 2}$$

Svar: $f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + \ln 2}$ $(\approx 1{,}4716)$

5. Visa att det i en omgivning av punkten 1 finns precis två funktioner $x=f(z)$ och $y=g(z)$ med kontinuerliga derivator sådana att $f(1)=g(1)=1$ och

$$\begin{cases} 2e^x-e^y-e^z=0 \\ xyz=1. \end{cases}$$

Bestäm även $f'(1)$ och $g'(1)$.

Sätt: $F(x,y,z)=2e^x-e^y-e^z$, $G(x,y,z)=xyz-1$

1°) $F(1,1,1)=0=G(1,1,1)$

2°) F, G har kontinuerliga partiella derivator i omgivning av $(1,1,1)$.

3°) $$\frac{d(F,G)}{d(x,y)}=\begin{vmatrix} 2e^x & -e^y \\ yz & xz \end{vmatrix}\Bigg|_{(x,y,z)=(1,1,1)}=\begin{vmatrix} 2e & -e \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\underline{\underline{3e\neq 0}}$$

Sats 30: Skärningskurvan K mellan F och G i en omgivning av $(1,1,1)$ framställs entydigt av $(f(z),g(z),z)$, där $f(z)$, $g(z)$ är kont. deriverbara funktioner av z i en omgivning av $z=1$.

Implicit derivering av $F(f(z),g(z),z)=0$ och $G(f(z),g(z),z)=0$ med avseende på z ger:

$$\begin{cases} F'_x(f(z),g(z),z)\cdot f'(z)+F'_y(f(z),g(z),z)\cdot g'(z)+F'_z(f(z),g(z),z)\cdot 1=0 \\ G'_x(f(z),g(z),z)\cdot f'(z)+G'_y(f(z),g(z),z)\cdot g'(z)+G'_z(f(z),g(z),z)\cdot 1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2e^x\cdot f'(z)-e^y\cdot g'(z)-e^z=0 \\ yz\cdot f'(z)+xz\cdot g'(z)+xy=0 \end{cases} \xRightarrow{x=y=z=1} \begin{cases} 2ef'(1)-eg'(1)-e=0 \\ f'(1)+g'(1)+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2f'(1)-g'(1)-1=0 \\ f'(1)+g'(1)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{cases} f'(1)=0 \\ g'(1)=-1 \end{cases}}}.$$

6. Beräkna för lämpliga y-värden följande integral genom att först beräkna dess derivata:

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{xe^x}\,dx.$$

Tillämpar Sats 34: $D = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ c \le y \le d\}$,

1°) klart att $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xe^x}$ kontinuerlig på D.

2°) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(xy)}{xe^x} = y \Rightarrow \int_0^1 f(x,y)\,dx \text{ existerar } \forall y \in [c,d], \\ x \ge 1:\ \dfrac{\sin(xy)}{xe^x} \le \dfrac{1}{e^x} \Rightarrow \int_1^\infty f(x,y)\,dx \text{ — " —} \end{cases}$

$\therefore \int_0^\infty f(x,y)\,dx$ existerar för alla $y \in [c,d]$.

3°) $f'_y(x,y) = \dfrac{x\cos(xy)}{xe^x} = \dfrac{\cos(xy)}{e^x}$, kontinuerlig i D

$|f'_y(x,y)| \le \dfrac{1}{e^x} = \mu(x)$. $\int_0^\infty \mu(x)\,dx$ existerar.

$$\therefore\ I'(y) = \int_0^\infty \frac{\cos(xy)}{e^x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\cos xy\,dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{y}\sin xy \cdot e^{-x}\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-x}\sin(xy)\,dx$$

$$= \frac{1}{y}\left[-\frac{1}{y}\cos(xy)e^{-x}\right]_0^\infty - \frac{1}{y}\int_0^\infty \frac{1}{y}e^{-x}\cos(xy)\,dx$$

$$= \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2}\cdot I'(y)$$

$$\therefore\ I'(y) = \frac{1}{y^2}\cdot\frac{y^2}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$

$\therefore\ I(y) = \arctan y + C$, $I(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

$$\therefore\ I(y) = \arctan(y),\quad y \in \mathbb{R}.$$