Demonstrationer i FDA, vecka 8

1. Bestäm alla punkter (a,b,c) på ytan
a) $x^2 - y = 2z$, b) $x^3 - 3xy + 2z = 0$,
där tangentplanet är parallellt med planet $x + 2y + z = 0$.

a) Planet $x+2y+z=0$ har normalvektor $n = (1,2,1)$.

$x^2 - y = 2z \iff F(x,y,z) = x^2 - y - 2z = 0$.

$\nabla F(a,b,c) = (2x, -1, -2)\big|_{(a,b,c)} = (2a, -1, -2)$.

$\nabla F(a,b,c)$ parallell med n betyder att $\exists k \neq 0$:

$\nabla F(a,b,c) = k(1,2,1)$,

Men detta ger ju att $2k = -1$ och $k = -2$ ↯

∴ Det finns ingen sådan punkt (a,b,c)

b) $F(x,y,z) = x^3 - 3xy + 2z = 0$

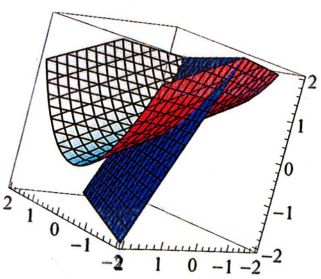
$\nabla F = (3x^2 - 3y, -3x, 2)$

$$\therefore \begin{cases} 3x^2 - 3y = k \\ -3x = 2k \\ 2 = k \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3}\left(3\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 2\right) = \frac{10}{9} \\ z = \frac{1}{2}(3xy - x^3) = -\frac{28}{27} \end{cases}$$

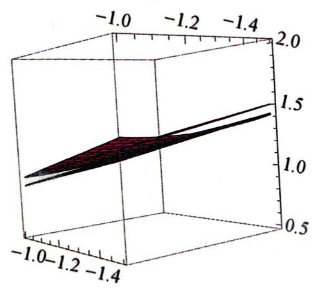
∴ Finns exakt en punkt $(a,b,c) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{9}, -\frac{28}{27}\right)$

Tangentplanets ekvation: $2\left(x + \frac{4}{3}\right) + 4\left(y - \frac{10}{9}\right) + 2\left(z + \frac{28}{27}\right) = 0$

a)



b)



2

2.) Visa att $(u,v) = (x+\sin(x+y),\ y+\sin(x-y))$ har en kontinuerligt deriverbar invers i en omgivning av $(x,y)=(0,0)$ och bestäm x'_u, x'_v, y'_u, y'_v i punkten $(u,v)=(0,0)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1+\cos(x+y), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos(x+y), \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = \cos(x-y) \\ \text{och } \dfrac{\partial v}{\partial y} = 1-\cos(x-y) \end{cases}$$

Partiella derivatorna kontinuerliga i en omgivning av $(0,0)$.

$$\det f'(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Sats 28: Avbildningen har en kontinuerligt deriverbar invers i en omgivning av $(u,v)=(0,0)$.

Formel (14) ger

$$(f^{-1})'(0,0) = (f'(0,0))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

I punkten $(u,v)=(0,0)$ är då:

$$x'_u = 0, \quad x'_v = 1, \quad y'_u = 1 \quad \text{och} \quad y'_v = -2.$$

3.) Visa ~~att~~ $x^y + \sin y = 1$ definierar y som deriverbar funktion av x i en omgivning av $(1,0)$ och beräkna $y'(x)$ (uttryckt i x och y).

$F(x,y) = x^y + \sin y - 1 = 0$, nivåkurva.

$1^\circ)$ $F(1,0) = 0$ ✓.

$2^\circ)$ $F'_x(x,y) = y\,x^{y-1}$, $F'_y(x,y) = x^y \cdot \ln x + \cos y$

F'_x, F'_y kontinuerliga i en omgivning av $(1,0)$ ✓.

$3^\circ)$ $F'_y(1,0) = 1^0 \ln 1 + \cos 0 = 1 \neq 0$ ✓.

Sats 29: $F(x,y) = 0$ definierar y som deriverbar funktion $y = y(x)$ i en omgivning av $(1,0)$.
Implicit derivering av $F(x, y(x)) = 0$ ger:

$$F'_x(x, y(x)) \cdot \frac{dx}{dx} + F'_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0$$

$$\therefore \; y'(x) = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))} = -\frac{y(x) \cdot x^{y(x)-1}}{x^{y(x)} \ln x + \cos(y(x))}$$

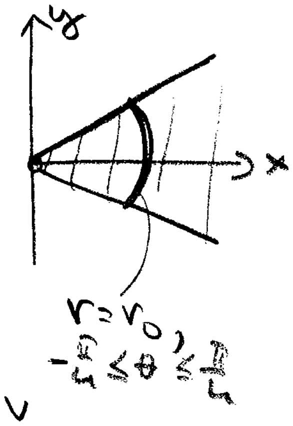
4.) Undersök om $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given av $\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

ger en omvändbar avbildning av $D = \{(x,y) : x \geq 0, -x \leq y \leq x\}$ på en mängd D' i uv-planet.

Lösning: Klart att $(0,0) \to (0,0)$ injektivt.

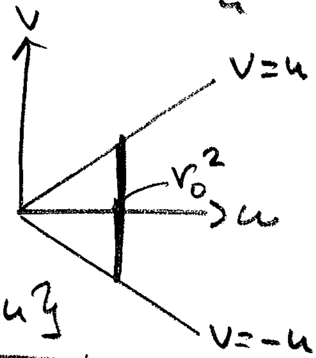
Alt 1. Beskriver $D \setminus \{(0,0)\}$ med polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r > 0, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$



Cirkelbågen: $r = r_0 > 0, \; -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

avbildas på: $\begin{cases} u = r_0^2 \\ v = 2r_0^2 \cos\theta \sin\theta = r_0^2 \cdot \sin 2\theta \end{cases}$



$\therefore$ Injektiv avbildning av

$D \setminus \{(0,0)\}$ på $D' = \{(u,v) : u > 0, -u \leq v \leq u\}$

$\therefore$ f avbildar D omvändbart på $\{(u,v) : u \geq 0, -u \leq v \leq u\}$.

Antag då att $(x,y) \in D$ och $(u,v) \in D' \cup \{(0,0)\}$.

$$\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \iff \begin{cases} u-v = (x-y)^2 \\ u+v = (x+y)^2 \end{cases} \underset{\substack{x-y \geq 0 \\ x+y \geq 0}}{\iff} \begin{cases} x-y = \sqrt{u-v} \\ x+y = \sqrt{u+v} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u-v} + \sqrt{u+v}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u+v} - \sqrt{u-v}\right) \end{cases}$$

(Alt 2. Kan också undersöka strålar $y = cx$, $x > 0$, $-1 \leq c \leq 1$, i D och hur de avbildas.)

5.] Undersök om det finns singulära punkter på kurvorna a) $x^5+y^3=0$, b) $x^y=y^x$.

a) $F(x,y) = x^5+y^3 = 0$

$\nabla F(x,y) = \bar{0} \iff (5x^4, 3y^2) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$

$\therefore$ (0,0) enda singulära punkt på kurvan.

$F(x,y) = 0 \iff y^3 = -x^5 \iff y(x) = -x^{5/3}$

$y'(x) = -\frac{5}{3}x^{2/3}$, y(x) deriverbar på $\mathbb{R}$.

b) $F(x,y) = x^y - y^x = 0$, $x>0, y>0$, $x^y = y^x$

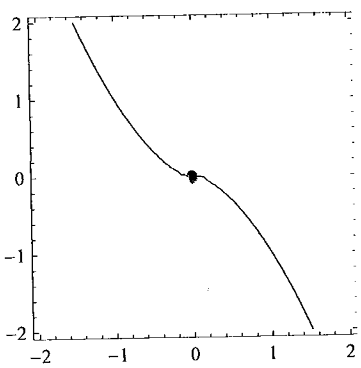
$$\begin{cases} F'_x = yx^{y-1} - y^x \cdot \ln y = 0 \\ F'_y = x^y \cdot \ln x - xy^{x-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yx^{y-1} = y^x \ln y \\ xy^{x-1} = x^y \ln x \end{cases}$$

$$\underset{(x^y=y^x)}{\Longrightarrow} \begin{cases} y = x\ln y \\ x = y\ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \ln y^x \\ x = \ln x^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \ln x^y \\ x = \ln y^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = y\ln x \\ x = x\ln y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e \\ y = e \end{cases}$$

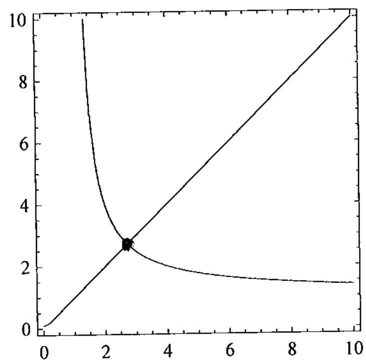
$\therefore$ (e,e) enda singulära punkt.

a)



$y(x) = -x^{5/3}$ deriverbar på $\mathbb{R}$

b)



(e,e) dubbelpunkt, $y(x) = x$ en gren.

6. Visa att det i en omgivning av $(0,1,1)$ finns en funktion $z(x,y)$ med kontinuerliga partiella derivator, som satisfierar ekvationen

$$e^{z-1}+zy+x-2y^3=0.$$

Beräkna för denna z'_x och z'_y (uttryckta i x,y och z).

Sätt: $F(x,y,z)=e^{z-1}+zy+x-2y^3=0$

$$\begin{cases} 1^\circ)\ F(0,1,1)=0 \ \checkmark \\ 2^\circ)\ F'_x=1,\ F'_y=z-6y^2,\ F'_z=e^{z-1}+y \quad \text{kont. i omg. av } (0,1,1). \ \checkmark \\ 3^\circ)\ F'_z(0,1,1)=e^0+1=2\neq 0. \ \checkmark \end{cases}$$

Sats 113: $\exists$ entydigt bestämd funktion $z=z(x,y)$ med kont. partiella derivator i omg. av $(0,1,1)$.

Deriverar implicit $F(x,y,z(x,y))=0$ med avseende på x och y:

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z)\cdot 1+F'_y(x,y,z)\cdot 0+F'_z(x,y,z)\cdot z'_x(x,y)=0 \\ F'_x(x,y,z)\cdot 0+F'_y(x,y,z)\cdot 1+F'_z(x,y,z)\cdot z'_y(x,y)=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} z'_x(x,y)=-\dfrac{F'_x(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))}=-\dfrac{1}{e^{z(x,y)-1}+y} \\[2ex] z'_y(x,y)=-\dfrac{F'_y(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))}=-\dfrac{z(x,y)-6y^2}{e^{z(x,y)-1}+y} \end{cases}$$