Demonstrationer i FOA vecka 5

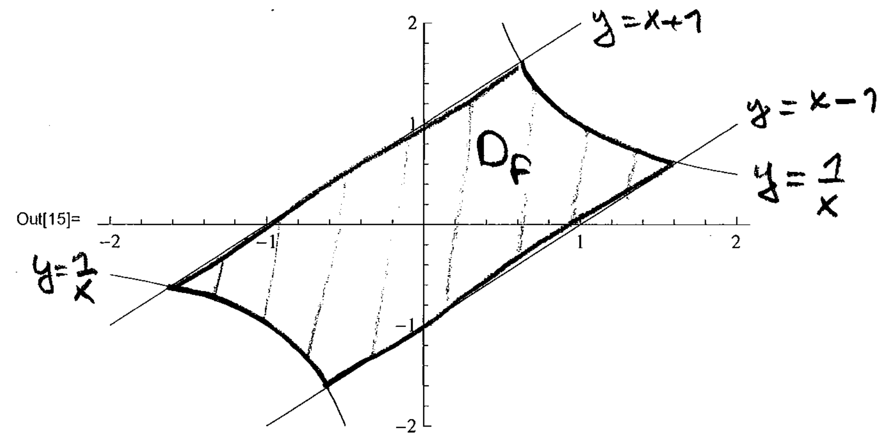
1. Visa att $f(x,y)=\sqrt{1-xy}+\sqrt{1-x+y}+\sqrt{1+x-y}$ är begränsad.

Definitionsmängden D_f:

$$\begin{cases} 1-xy \geq 0 \iff xy \leq 1 \iff \begin{cases} y \leq \frac{1}{x}, & x>0, \\ y \geq \frac{1}{x}, & x<0, \\ x=0 \vee y=0. \end{cases} \\ 1-x+y \geq 0 \iff y \geq x-1. \\ 1+x-y \geq 0 \iff y \leq x+1. \end{cases}$$

```
In[15]:= Plot[{1/x, x-1, x+1}, {x, -2, 2}, PlotRange → {-2, 2}]
```

Out[15]=



∴ D_f sluten och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, alltså kompakt.

f är kontinuerlig på D_f (polynom kont., rotfunktionen kont., sammansättning av kontinuerliga fkter kontinuerlig. Summor av kont. fkter kontinuerlig.). Sats 9: f begränsad på D_f.

2. Visa att för $f(t) = (t, t^2, t^3)$ finns inget ξ mellan 0 och 2, så att $f(2) - f(0) = 2f'(\xi)$.

$$f(2) - f(0) = (2,4,8) - (0,0,0) = (2,4,8)$$

$$f'(t) = (1, 2t, 3t^2), \quad f'(\xi) = (1, 2\xi, 3\xi^2)$$

$$2f'(\xi) = (2, 4\xi, 6\xi^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2f'(\xi) = (2, 4\xi, 6\xi^2) \\ = (2,4,8) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ 4\xi = 4 \\ 6\xi^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \left(\xi = 1 \wedge \xi = \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad \lightning$$

$$\therefore \nexists\, \xi \in (0,2) : f(2) - f(0) = 2f'(\xi). \ \square$$

3. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

a) Visa att om $f'(t) = \overline{0}$ i ett intervall, är $f(t)$ konstant i intervallet.

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)), \quad f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ j = 1, \dots, m$$

$$\forall t_0 \in [a,b] : f'(t_0) = \overline{0} \Leftrightarrow \forall t_0 \in [a,b] : f_j'(t_0) = 0, \quad 1 \le j \le m$$

$$\Leftrightarrow f_j(t) = k_j \ (= \text{konstant}), \text{ för } j = 1, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(t) = \overline{k} = (k_1, \dots, k_m)}. \ \square$$

b) Visa att om $f'(t) = g'(t)$ i ett intervall, är i intervallet $f(t) = g(t) + \overline{c}$.

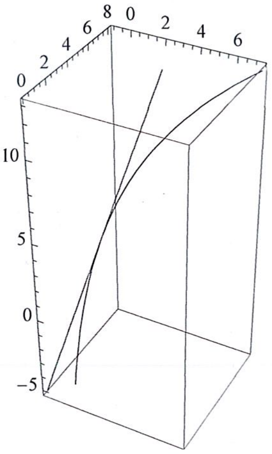
Sätt: $h(t) = f(t) - g(t)$ i $[a,b]$.

Då är $h'(t) = f'(t) - g'(t) = \overline{0}$ i $[a,b]$

$\overset{a)}{\Rightarrow} h(t) = \overline{c}$ (konstant) i $[a,b]$

$$\Rightarrow \underline{f(t) = g(t) + \overline{c} \text{ i } [a,b]}. \ \square$$

4. a) Bestäm tangenten till $(x,y,z)=(e^{2t}, 3e^{t}, 9t+4)$ i punkten $(1,3,4)$.



$f(t)=(e^{2t}, 3e^{t}, 9t+4)$

$\underline{t_0=0} \Rightarrow f(t_0)=(1,3,4)$

$f'(t)=(2e^{2t}, 3e^{t}, 9)$

$f'(t_0)=(2,3,9)$

$\therefore$ tangentens ekvation i parameterform:

$$\bar{v}=(1,3,4)+u(2,3,9),\quad -\infty<u<\infty.$$

b) Bestäm tangenten till kurvan som definieras av ekvationssystemet $\begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ i pten. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

Parametriseringen av kurvan:

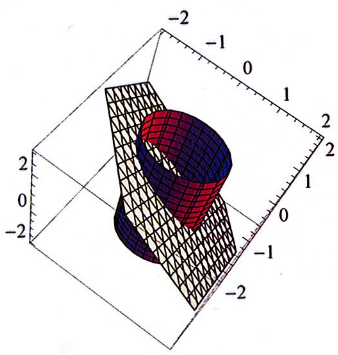
$$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \\ z=1-\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \quad 0\le\theta<2\pi. \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(\theta)=-\sin\theta \\ y'(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ z'(\theta)=\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \end{cases}$$

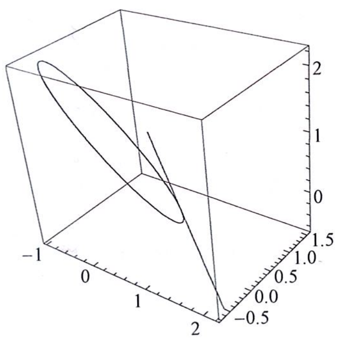
$$\underline{\theta=\frac{\pi}{4}} \longleftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\left(x'\left(\tfrac{\pi}{4}\right), y'\left(\tfrac{\pi}{4}\right), z'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right).$$

Tangentens ekvation:

$$\bar{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)+t\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right),\quad -\infty<t<\infty.$$





4

5. Beräkna båglängden av nephroiden, (Huygens, 1678),

$$\begin{cases} x = a\,(3\cos t - \cos 3t) \\ y = a\,(3\sin t - \sin 3t) \end{cases},$$

där $-\pi \le t \le \pi$ och $a > 0$.

$$\begin{cases} x'(t) = a\,(-3\sin t + 3\sin 3t) \\ y'(t) = a\,(3\cos t - 3\cos 3t) \end{cases}$$

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$\begin{aligned}
x'(t)^2 + y'(t)^2 &= a^2 \{ 9\sin^2 t + 9\sin^2 3t - 18\sin t \sin 3t \\
&\qquad + 9\cos^2 t + 9\cos^2 3t - 18\cos t \cos 3t \} \\
&= a^2 \{ 9 + 9 - 18(\sin t \sin 3t + \cos t \cos 3t) \} \\
&= a^2 \{ 18 - 18\cos 2t \} \\
&= 18a^2 (1 - \cos 2t) \\
&= 18a^2 (1 - \cos^2 t + \sin^2 t) \\
&= 18a^2 \cdot 2\sin^2 t \\
&= 36a^2 \sin^2 t
\end{aligned}$$

$$\therefore \underline{\underline{S}} = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{36a^2\sin^2 t}\, dt = 2\int_0^{\pi} 6a\sin t\, dt$$

$$= 12a\,[-\cos t]_0^{\pi}$$

$$= 12a\,(1 - (-1)) = \underline{\underline{24a}}$$

$$\left(\begin{aligned} &\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) \\ &\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{aligned} \right)$$