Demonstrationer i FDA, vecka 4

1. a) A och B öppna mängder i $\mathbb{R}^n$.

$\bar{x} \in A \cup B \Rightarrow (\bar{x} \in A \vee \bar{x} \in B)$

$\Rightarrow (\exists \delta_1 > 0 : O_{\delta_1}(\bar{x}) \subseteq A)$ eller $(\exists \delta_2 > 0 : O_{\delta_2}(\bar{x}) \subseteq B)$

$\Rightarrow \exists \delta > 0,\ \delta = \delta_1$ eller $\delta = \delta_2 : O_\delta(\bar{x}) \subseteq A \cup B$

$\Rightarrow (A \cup B)^\circ = A \cup B \Rightarrow$ $A \cup B$ öppen mängd

$\bar{x} \in A \cap B \Rightarrow (\bar{x} \in A \wedge \bar{x} \in B)$

$\Rightarrow (\exists \delta_1 > 0 : O_{\delta_1}(\bar{x}) \subseteq A)$ och $(\exists \delta_2 > 0 : O_{\delta_2}(\bar{x}) \subseteq B)$

$\Rightarrow \exists \delta > 0,\ \delta = \min(\delta_1, \delta_2) : O_\delta(\bar{x}) \subseteq A \cap B$

$\Rightarrow (A \cap B)^\circ = A \cap B \Rightarrow$ $A \cap B$ öppen mängd.

b) A och B slutna mängder i $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ CA och CB öppna mängder (Exempel 3)

$\Rightarrow$ $CA \cup CB$ och $CA \cap CB$ öppna mängder (a-fallet)

$\Rightarrow$ $C(A \cap B)$ och $C(A \cup B)$ öppna mängder (de Morgan)

$\Rightarrow$ $A \cap B$ och $A \cup B$ slutna mängder.

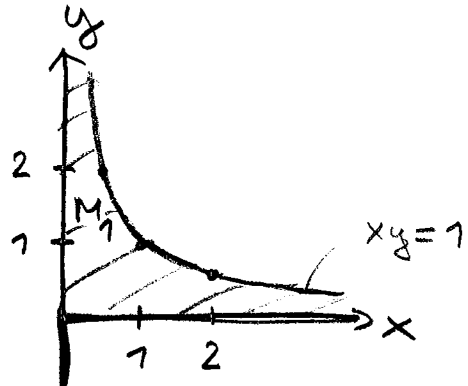
(Unionen av ~~ett~~ godtyckligt antal och snittet av ~~ett~~ ändligt antal öppna mängder är en öppen mängd
Snittet av ~~ett~~ godtyckligt antal och unionen av ~~ett~~ ändligt antal slutna mängder är en sluten mängd)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = (0,1)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0,n) = (0,1) \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, 1+\frac{1}{n}\right] = [0,2]$$

2. Undersök om någon av nedanstående mängder är kompakt.

a) $M_1 = \{(x,y) : 0 \le xy \le 1 \text{ och } x \ge 0\}$



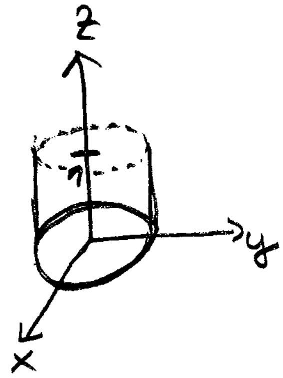
$xy = 0 \Rightarrow x = 0$ eller $y = 0$

$xy = 1$ och $x \ge 0$, hyperbelbåge i första kvadranten.

$\partial M_1 = \{(x,y) : (xy=1) \vee \underbrace{(x=0)}_{y\text{-axeln}} \vee (y=0 \wedge x \ge 0)\}$

M_1 sluten ($\partial M_1 \subset M_1$), ej begränsad, ej kompakt.

b) $M_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1 \text{ och } 0 \le z < 1\}$



M_2 begränsad ($M_2 \subset O_2(\bar{0})$)

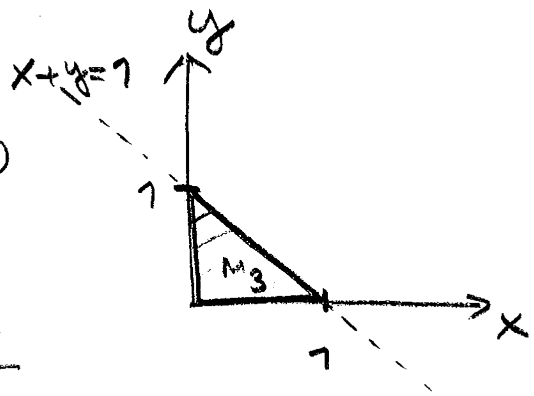
$\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1 \text{ och } z = 1\}$ "taket" är randpunkter till M_2 som inte tillhör M_2. $\partial M_2 \not\subseteq M_2$. M_2 ej sluten, ej kompakt

c) $M_3 = \{(x,y) : x + y \le 1 \text{ och } x \ge 0 \text{ och } y \ge 0\}$

($M_3 \subset O_{1+\varepsilon}(\bar{0})$, $\varepsilon > 0$)

M_3 begränsad och $\partial M_3 \subseteq M_3$,

M_3 sluten



$\Rightarrow$ M_3 kompakt mängd

3. Undersök om $\mathbf{r}$ är kontinuerlig i $t=0$ då man definierar $\mathbf{r}(0)=(1,0)$.

a) $\mathbf{r}(t) = \left(\dfrac{t^2}{1+2t-e^{2t}}, \sinh t\right)$

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1+2t-e^{2t}}, \lim_{t\to 0}\sinh t\right),$$ om gränsvärdena existerar.

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1+2t-e^{2t}} \quad \left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$$

Täljarens och nämnarens tredje derivator kontinuerliga i omgivning av origo, tillämpar l'Hospital 2 ggr.

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{2-2e^{2t}} \quad \left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2}{-4e^{2t}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{t\to 0}\sinh t = \sinh(0) = 0,$$ ty $\sinh t$ kontinuerlig i $t=0$.

$\therefore\ \mathbf{r}(t) \xrightarrow[t\to 0]{} (-\tfrac{1}{2}, 0) \neq \mathbf{r}(0)$, ej kontinuerlig i $t=0$.

b) $\mathbf{r}(t) = \left(\dfrac{\tan t}{t}, (1+t)^{2t}\right)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{\sin t}{t} = 1\cdot 1 = 1.$$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{2t} = \lim_{t\to 0}\Big(\underbrace{(1+t)^{1/t}}_{\to e}\Big)^{2t^2} = e^0 = 1.$$

$\therefore\ \mathbf{r}(t) \longrightarrow (1,1) \neq \mathbf{r}(0)$, då $t\to 0$.

$\mathbf{r}$ är inte kontinuerlig i $t=0$.

4. Har följande funktioner ett gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$:

a) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

1°. Vi närmar oss $(0,0)$ längs x-axeln:

$x \neq 0$: $f(x,0) = \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \to 1$, då $x \to 0$.

2°. Vi närmar oss $(0,0)$ längs linjen $y = x$:

$x \neq 0$: $f(x,x) = \dfrac{(2x)^2}{2x^2} = \dfrac{4x^2}{2x^2} = 2 \to 2$, då $x \to 0$.

Svar: Gränsvärde saknas.

b) $g(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+xy+y^2}$.

$x \neq 0$: $g(x,0) = \dfrac{0}{x^2} = 0 \to 0$, då $x \to 0$.

$g(x,y) \to 0$, då $(x,y) \to (0,0)$?

Sätt: $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{r^2\cos^2\theta \, r^2\sin^2\theta}{r^2 + r^2\sin\theta\cos\theta} \right| \leq \frac{r^2}{|1+\sin\theta\cos\theta|}$$

$$= \frac{r^2}{\underbrace{|1+\frac{1}{2}\sin 2\theta|}_{\geq \frac{1}{2}}} \leq 2r^2 = 2(x^2+y^2)$$

$$= 2|(x,y)-(0,0)|^2 \to 0, \text{ då } (x,y) \to (0,0)$$

Svar: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

5] Betrakta $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+xy)}{xy + x^3y^3}$, $D_f = \{(x,y) : x>0, y>0\}$

och utred om den har ett gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$.

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{xy+x^3y^3} = \frac{\ln(1+xy)}{xy} \cdot \frac{1}{1+x^2y^2}$$

1°) $xy \to 0$, då $(x,y) \to (0,0)$, och $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \to 1$, då $t \to 0$

ger för sammansättningen: $\dfrac{\ln(1+xy)}{xy} \to 1$, då $(x,y) \to (0,0)$

2°) Funktionen $g(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2y^2}$ är en rationell funktion

i x och y som är kontinuerlig i $(0,0)$, så

$g(x,y) \to g(0,0) = \dfrac{1}{1+0^2\cdot 0^2} = 1$, då $(x,y) \to (0,0)$

∴ 1°) och 2°) ger att

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{xy} \cdot \frac{1}{1+x^2y^2} \to 1\cdot 1 = 1, \text{ då } (x,y)\to(0,0).$$

∴ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.