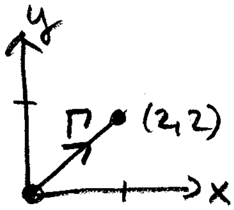
# Demonstrationer i FDA, vecka 18

1.) Beräkna $\int_\Gamma (x^2+xy)\,dx + (y^2-xy)\,dy$, där $\Gamma$ går från origo till $(2,2)$ längs:
a) linjen $y=x$, b) parabeln $x^2=2y$.

a) $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=t \end{cases}$, $0\le t\le 2$

$\begin{cases} dx = 1\cdot dt \\ dy = 1\cdot dt \end{cases}$

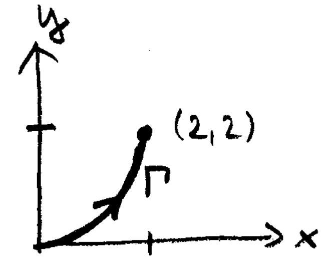



$$\int_\Gamma (x^2+xy)\,dx + (y^2-xy)\,dy = \int_0^2 \left\{(t^2+t\cdot t)\cdot 1 + (t^2-t\cdot t)\cdot 1\right\}dt$$

$$= \int_0^2 2t^2\,dt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{16}{3}}} \ (\approx 5{,}3)$$

b) $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=\frac{t^2}{2} \end{cases}$, $0\le t\le 2$

$dx = 1\cdot dt$
$dy = t\cdot dt$




$$\int_\Gamma (x^2+xy)\,dx + (y^2-xy)\,dy = \int_0^2 \left[\left(t^2+\frac{t^3}{2}\right)\cdot 1 + \left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{2}\right)t\right]dt$$

$$= \int_0^2 \left(t^2+\frac{t^3}{2}-\frac{t^4}{2}+\frac{t^5}{4}\right)dt = \left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{8}-\frac{t^5}{10}+\frac{t^6}{24}\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}+\frac{16}{8}-\frac{32}{10}+\frac{64}{24} = \underline{\underline{\frac{62}{15}}} \ (\approx 4{,}1)$$

(Kurvintegralen beroende av vägen, fältet är ej konservativt)

**2.** Bestäm en enkel, sluten, positivt orienterad, kontinuerligt deriverbar kurva $\Gamma$ i planet så att

$$\int_\Gamma (4y^3+y^2x-4y)\,dx + (8x+x^2y-x^3)\,dy$$

blir så stor som möjligt och beräkna kurvintegralen för denna kurva.

<u>Lösning:</u>

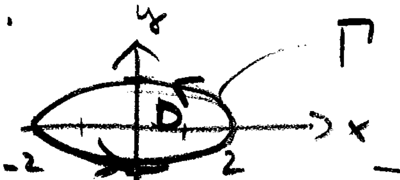
$$\begin{cases} P(x,y) = 4y^3+y^2x-4y, & Q(x,y) = 8x+x^2y-x^3 \\ P'_y(x,y) = 12y^2+2yx-4, & Q'_x(x,y) = 8+2xy-3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P, Q, P'_y, Q'_x \text{ \underline{kontinuerliga} på } \mathbb{R}^2. \\ \text{Låt } \Gamma \text{ uppfylla antagandena i uppgiftstexten.} \end{cases}$$

<u>Greens formel kan tillämpas</u>: ( $D$ = området innanför $\Gamma$ )

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \underbrace{(12-12y^2-3x^2)}_{\geq 0 \iff 3x^2+12y^2 \leq 12 \iff \frac{x^2}{4}+y^2 \leq 1 \iff \left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2 \leq 1.}\,dx\,dy = \underline{\underline{I}}.$$



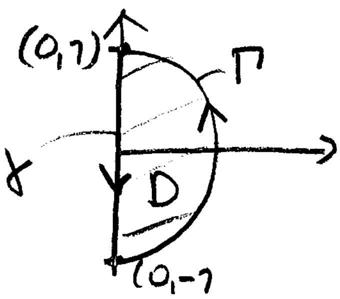

$\therefore$ $\Gamma$ är <u>ellipsen</u> $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1$

$$\underline{\underline{I}} = \left[ \begin{cases} x = 2\cdot r\cdot\cos\theta \\ y = 1\cdot r\cdot\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0<r\leq 1 \\ 0\leq\theta<2\pi \end{matrix} \right\} = D', \quad \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \underline{\underline{2r}} \Bigg]$$

$$= 12\iint_D \left(1-y^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)dx\,dy = 12\cdot\iint_{D'} (1-r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta)\cdot 2r\,dr\,d\theta$$

$$= 24\int_0^1 (r-r^3)\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)dr = 48\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 48\pi\cdot\frac{1}{4} = \underline{\underline{12\pi}}.$$

3.) En partikel förflyttas från $(0,-1)$ till $(0,1)$ under inverkan av $\overline{F}(x,y) = (e^x, 1+xy^2)$. Beräkna det arbete som utförs, då rörelsen sker längs en halvcirkelbåge i halvplanet $x \geq 0$.




Lösning: $\begin{cases} P(x,y) = e^x, & P'_y(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 1+xy^2, & Q'_x(x,y) = y^2 \end{cases}$

$P, Q, P'_y, Q'_x$ kont. på $D \cup (\Gamma + \gamma)$.

$\Gamma + \gamma$ sluten, enkel, styckvis regulär, positivt orienterad.

$\therefore$ Greens formel kan tillämpas.

$\gamma : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}, \quad t: 1 \longrightarrow -1$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_1^{-1} (e^0 \cdot 0 + 1)\,dt = [t]_1^{-1} = -2.$$

$$\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \iint_D y^2\,dx\,dy = \left[\begin{matrix} \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, & 0 < r \leq 1, \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r & \end{matrix}\right]$$

$$= \iint_{D'} r^3 \sin^2\theta\,dr\,d\theta = \left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta\right)$$

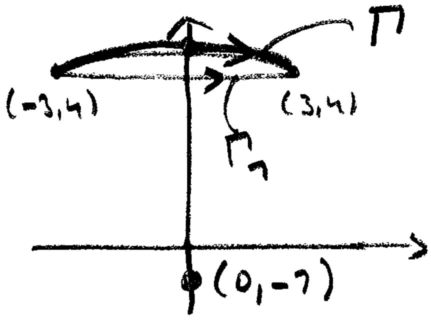
$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$

$$\therefore \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy - \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

$$= \frac{\pi}{8} - (-2) = 2 + \frac{\pi}{8}.$$

4.) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \frac{(y+1)\,dx - x\,dy}{x^2+(y+1)^2}$

då $\Gamma$ är cirkelbågen från $(-3,4)$ till $(3,4)$, via $(0,5)$, längs $x^2+y^2=25$.




Lösning: $\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2+(y+1)^2} \\ Q(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+(y+1)^2} \end{cases}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-(1+y)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \text{då } (x,y) \neq (0,-1)$$

Sätt: $D = \{(x,y) : y>0\}$. Enkelt sammanhängande område, $P, Q, P'_y, Q'_x$ kontinuerliga i $D$.

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ i $D$. Sats 6.9: Fältet $(P,Q)$ konservativt i $D$.

Då gäller: $\displaystyle\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1}$, där $\Gamma_1$ är sträckan från $(-3,4)$ till $(3,4)$. $\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 4 \end{cases}$, $t : -3 \to 3$.

$$\therefore \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma_1} \frac{(y+1)\,dx - x\,dy}{x^2+(1+y)^2} = \int_{-3}^{3} \frac{5\cdot 1 - t\cdot 0}{t^2+5^2}\,dt$$

$$= \int_{-3}^{3} \frac{1/5}{1+(t/5)^2}\,dt = \left[\arctan\left(\frac{t}{5}\right)\right]_{-3}^{3}$$

$$= \arctan\left(\frac{3}{5}\right) - \arctan\left(\frac{-3}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{3}{5}\right) \quad (\approx 1{,}08)$$

**5.** En partikel påverkas av kraften

$$\bar{F}(x,y) = \left( \frac{y^2}{1+x^2y^2}, \frac{xy}{1+x^2y^2} + \arctan(xy) \right) = (P, Q).$$

Visa att kraftfältet är konservativt och bestäm en potentialfunktion $U$ till $\bar{F}$. Beräkna arbetet som krävs för att flytta en partikel från origo till $(1,1)$.

Lösning: $P, Q$ kontinuerliga i $\mathbb{R}^2$, som är ett öppet och sammanhängande område, Sats 67 ger att fältet är konservativt i $\mathbb{R}^2$ om vi kan hitta en potentialfunktion $U(x,y)$ så att $\nabla U(x,y) = (P, Q)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{y^2}{1+x^2y^2} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{xy}{1+x^2y^2} + \arctan(xy) \end{cases} \Rightarrow U(x,y) = \int \frac{y^2}{1+x^2y^2}\,dx = y \int \frac{y}{1+(xy)^2}\,dx$$

$$= y\arctan(xy) + g(y),$$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deriverbar.

$$\therefore \frac{xy}{1+x^2y^2} + \arctan(xy) = \frac{\partial U}{\partial y} = \arctan(xy) + \frac{xy}{1+x^2y^2} + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

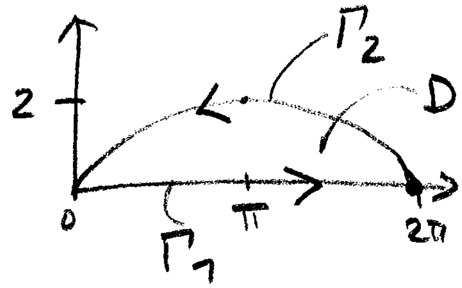
Kan välja: $U(x,y) = y\arctan(xy)$ $\quad (C = 0)$

Arbetet att flytta partikeln från origo till $(1,1)$ ges av:

$$U(1,1) - U(0,0) = \arctan 1 - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

**6.]** Beräkna arean av området mellan $x$-axeln och cykloidbågen $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, där $0 \le t \le 2\pi$

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. $\quad \Gamma_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = 0 \end{cases}, \; t: 0 \to 2\pi$




$\Gamma_2 : \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \; t : 2\pi \to 0. \end{cases}$

$\Gamma$ positivt orienterad, styckevis reguljär kurva som omsluter $D$.

$$\therefore \; A(D) \overset{(4.9)}{=} \iint_D dx\,dy = -\oint_\Gamma y\,dx = \oint_\Gamma x\,dy = \frac{1}{2}\oint_\Gamma (-y\,dx + x\,dy).$$

$$= \frac{1}{2}\oint(-y\,dx + x\,dy) = \frac{1}{2}\left( \int_0^{2\pi} (0 \cdot 1 + t \cdot 0)\,dt + \int_{2\pi}^{0} \{(\cos t - 1)\cdot(1 - \cos t) + (t - \sin t)\cdot \sin t\}\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} (\cos t - \cos^2 t - 1 + \cos t + t\sin t - \sin^2 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} (2(\cos t - 1) + t\sin t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left( \Big[2\sin t - 2t\Big]_{2\pi}^{0} + \Big[-t\cos t\Big]_{2\pi}^{0} - \int_{2\pi}^{0} -\cos t\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\pi + 2\pi + \underbrace{\Big[\sin t\Big]_{2\pi}^{0}}_{=0}\right) = \underline{\underline{3\pi}}.$$