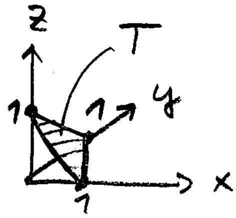
Demonstrationer i FDA, vecka 14

1. Beräkna det största värde som $f(x,y,z) = xy\sqrt{z}$ kan anta då $x+y+z=1$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Lösning: Sätt $g(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$.



1° f antar ett största värde i triangelytan T, (kontinuerlig funktion på kompakt mängd).

$x=0 \vee y=0 \vee z=0 \Rightarrow f(x,y,z) = 0$.

$\therefore$ f antar ett största värde i det inre av T, $(x,y,z>0)$.

2° $\nabla g(x,y,z) = (1,1,1)$, $\nabla f(x,y,z) = \left(y\sqrt{z}, x\sqrt{z}, \dfrac{xy}{2\sqrt{z}}\right)$

$\therefore$ $\nabla g, \nabla f$ kontinuerliga i det inre av T.

Tillämpar Sats 46: $\nabla g \neq \bar{0}$, villkor (B) gäller ej.

Villkor (A): $\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ $(x>0, y>0, z>0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\sqrt{z} = \lambda \\ x\sqrt{z} = \lambda \\ \dfrac{xy}{2\sqrt{z}} = \lambda \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 1-x-y = 1-2x \\ x\sqrt{1-2x} = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-2x}} \end{cases}$$

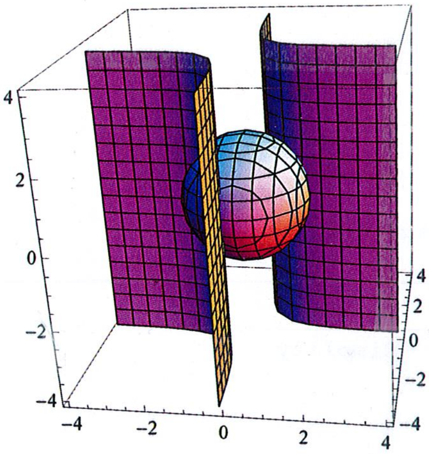
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 1-2x \\ 2x(1-2x) = x^2 \end{cases} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = x \\ z = 1-2x \\ (x=0) \vee x = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\therefore \quad f\left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{125} \quad (\approx 0{,}07)$$

är det största värdet under bivillkoret $g(x,y,z)=0$, $x,y,z \geq 0$.

2.) Bestäm det största och minsta värdet av $f(x,y,z) = x+y+z$ under bivillkoren $x^2+y^2+z^2=3$ och $xy = 1/2$.

1°) Bivillkoren bildar en mängd som är unionen av två elliptiska slutna ringar på $x^2+y^2+z^2=3$, en kompakt mängd. $f(x,y,z)$ är kontinuerlig på mängden, så största och minsta värde antas.



2°) Sätt $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3=0$, $g_2(x,y,z) = xy - 1/2 = 0$.

Lagrange multiplikatormetod, Sats 49:

$$(B)\begin{cases}(\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\nabla g_1\\ \nabla g_2\end{pmatrix} = \bar{0}\\ g_1 = 0\\ g_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}2x & 2y & 2z\\ y & x & 0\end{pmatrix} = \bar{0}, \quad (\lambda,\mu)\neq\bar{0}\\ x^2+y^2+z^2 = 3\\ xy = 1/2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x\lambda + \mu y = 0 & (1)\\ 2y\lambda + \mu x = 0 & (2)\\ 2\lambda z = 0 & (3)\\ x^2+y^2+z^2 = 3 & (4)\\ xy = 1/2 & (5)\end{cases}$$

$(3) \Leftrightarrow (\lambda = 0) \vee (z=0)$

a) $\lambda \neq 0 \wedge \mu = 0$: $\Rightarrow x=y=z=0$ uppfyller ej (4), (5).

b) $\lambda = 0$ och $\mu \neq 0$: $\Rightarrow x=y=0$ uppfyller ej (5).

c) $\lambda \neq 0$ och $\mu \neq 0$: $y\cdot(1) - x\cdot(2) = 0$ och $z=0$

$\Rightarrow \mu(y^2-x^2) = 0 \Rightarrow (y^2 = x^2$ och $z=0)$

$\Rightarrow \begin{cases}2x^2 = 3\\ x^2 = 1/2\end{cases}$ Saknar lösning!

$\therefore$ (B) ger inga kandidater till extrempunkter

3

Villkor (4): $\begin{cases} \nabla f = (\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}\nabla g_1 \\ \nabla g_2\end{pmatrix} \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda 2x + \mu y & (1) \\ 1 = \lambda 2y + \mu x & (2) \\ 1 = \lambda 2z & (3) \\ x^2+y^2+z^2 = 3 & (4) \\ xy = 1/2 & (5) \end{cases}$

(1)−(2) ger: $(2\lambda-\mu)x + (\mu-2\lambda)y = 0 \iff (2\lambda-\mu)(x-y) = 0$
$\iff (y = x) \vee (2\lambda - \mu = 0)$.

1°) $y = x$. (5) ger att $x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
$x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ och (4) ger: $z^2 = 3 - 2\cdot\frac{1}{2} = 2 \iff z = \pm\sqrt{2}$

∴ Möjliga extrempunkter: $\begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{2}\right), \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{2}\right). \end{cases}$

2°) $2\lambda - \mu = 0$. $\iff \mu = 2\lambda$. (1) och (3) ger: $\begin{cases} x + y = \frac{1}{2\lambda} \\ z = \frac{1}{2\lambda} \end{cases}$

Då blir (4): $x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 3 \iff 2x^2 + 2y^2 + 2xy = 3$
$\overset{}{\underset{(5)}{\iff}} 2x^2 + 2\cdot\frac{1}{4x^2} + 1 = 3 \quad |\cdot(2x^2)$
$\iff 4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$
$\iff x^2 = \frac{4 \pm\sqrt{16-16}}{8} = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

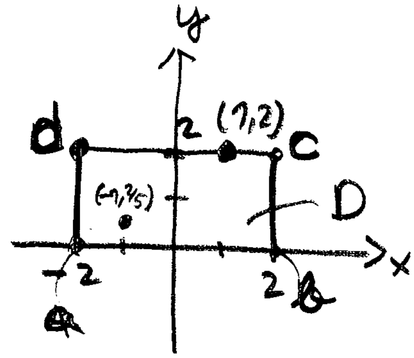
a) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
b) $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$: $y = \frac{1}{2x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ger ~~att~~ $z = \pm\sqrt{2}$, Samma punkter som i 1°).

Svar: $\begin{cases} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} & \text{största värdet}, \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2} & \text{minsta värdet}. \end{cases}$

3. Beräkna det största och minsta värdet av
$f(x,y) = x^2y - 3xy + 2x - 4y$ på $D = \{(x,y) : |x| \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$.

Lösning: 1°) Stationära punkter i D°:



$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 3y + 2 = 0 \\ \underbrace{x^2 - 3x - 4 = 0}_{x = -1 \vee (x = 4)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$f(-1, \frac{2}{5}) = -2$.

2°) Extremvärden på ∂D:

a) Sträckan ab: $f(x,y) = f(x,0) = 2x$, $-2 \le x \le 2$.
f strängt växande
$\therefore$ Hörnpunkterna a och b kandidater till globala extrempunkter.

b) Sträckan bc: $f(x,y) = f(2,y) = 4 - 6y$, $0 \le y \le 2$.
Strängt avtagande, b och c kandidater.

c) Sträckan cd: $f(x,y) = f(x,2) = 2x^2 - 4x - 8$, $-2 \le x \le 2$.
$= 2(x-1)^2 - 10$
har ~~ett~~ minimum -10 i $x = 1$, svarande mot $(1,2)$.

d) Sträckan da: $f(x,y) = f(-2,y) = 6y - 4$, $0 \le y \le 2$.
Strängt växande, d och a kandidater.

3°) Hörnpunkterna: $f(a) = -4$, $f(b) = 4$, $f(c) = -8$,
$f(d) = 8$.

$\therefore \begin{cases} \text{Största värdet } f(d) = f(-2,2) = 8 \\ \text{Minsta värdet } f(1,2) = -10 \end{cases}$

4.) Visa att funktionen $f(x,y) = \dfrac{xy}{4+(x+y)^3}$ antar ett största och minsta värde på $D = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0\}$ och bestäm dessa. Givet är att $(1,1)$ är den enda stationära punkten i det inre av mängden D.

1°) Klart att det minsta värdet är $f(x,y) = 0$ då $x = 0 \vee y = 0$.

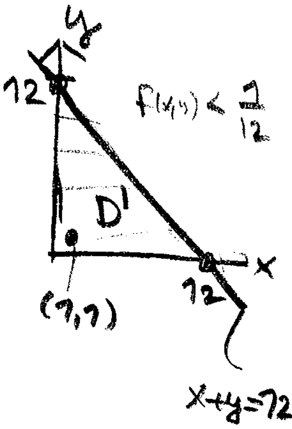
2°) Stationära punkter: $(1,1) \in D^\circ$.
$f(1,1) = \dfrac{1}{12}$.

3°) Sätt: $r = x+y$, $r > 0$. ($x+y = r$ och $x \geq 0$, $y \geq 0$ $\Rightarrow$ $x \leq r$ och $y \leq r$).

$$0 \leq f(x,y) = \frac{xy}{4+r^3} \leq \frac{r^2}{4+r^3} = \frac{1}{\frac{4}{r^2}+r} < \frac{1}{12},$$

då $r = x+y \geq 12$.

Låt $D' = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 12\}$



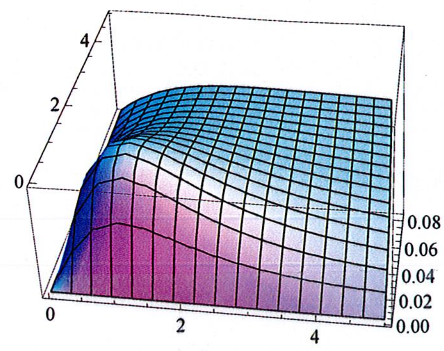
D' kompakt mängd, sluten triangelyta.
f kont. på D', antar största värde.
På $\partial D'$ är $f(x,y) < \dfrac{1}{12}$.
I $D \setminus D'$ är $f(x,y) < 1/12$.

$\therefore$ Maximum i D' och D är $f(1,1) = \dfrac{1}{12}$.

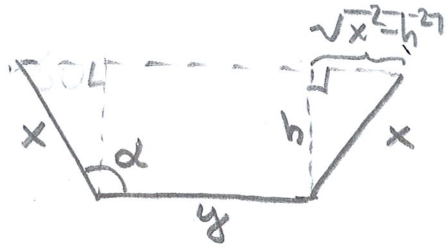
4.)

In[669]:= `Plot3D[{x y / (4 + (x + y) ^3)}, {x, 0, 5}, {y, 0, 5}, PlotRange → All]`

Out[669]=



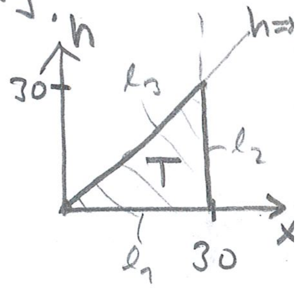
5.)



$\underline{2x+y=60}$.

Tvärsnittsarean: $A(x,h) = h\sqrt{x^2-h^2} + yh = (60-2x)h + h\sqrt{x^2-h^2}$,

Bestämmer största värdet av $A(x,h)$ på den kompakta triangelytan $T = \{(x,h) : 0 \le x \le 30,\ 0 \le h \le x\}$.



1°) Stationära punkter i T°:

$$\begin{cases} A'_x = 0 \\ A'_h = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} h\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-h^2}} - 2\right) = 0 \\ 60 - 2x - \dfrac{h^2}{\sqrt{x^2-h^2}} + \sqrt{x^2-h^2} = 0 \end{cases} \overset{(h\neq 0)}{\Rightarrow} \underline{x = 2\sqrt{x^2-h^2}}$$

Insättning av $\sqrt{x^2-h^2} = \frac{x}{2}$ i ekv. 2: $60 - 2x - \dfrac{h^2}{\frac{x}{2}} + \dfrac{x}{2} = 0$

$\iff \dfrac{x^2}{4} - h^2 + (60-2x)\dfrac{x}{2} = 0 \iff h^2 = 30x - \dfrac{3}{4}x^2$

Insättning i $x = 2\sqrt{x^2-h^2}$: $x = 2\sqrt{x^2 - (30x - \frac{3}{4}x^2)}$

$\iff \ldots \iff x^2 = 7x^2 - 120x \iff 6x(20-x) = 0 \iff (x=0) \vee \underline{x=20}$

$\therefore$ $\underline{x=20,\ y=20,\ h=\sqrt{30\cdot 20 - \frac{3}{4}20^2} = 10\sqrt{3}}$

$\underline{A(20, 10\sqrt{3}) = 300\sqrt{3}}$ största arean för $(x,h) \in T^\circ$

$\approx 519{,}6$

5.] (forts.)

2°) Randpunkter och hörnpunkter

a) ℓ_1 : $h=0$, $0 \le x \le 30$, $A(x,0) = 0$, $\begin{pmatrix} A(0,0)=0 \\ A(30,0)=0 \end{pmatrix}$

b) ℓ_2 : $x=30$, $0 \le h \le 30$.

$g(h) = A(30,h) = h\sqrt{900-h^2}$. $g(0) = g(30) = 0$ $\begin{pmatrix} A(30,30) \\ =0 \end{pmatrix}$

$$g'(h) = \frac{2(450-h^2)}{\sqrt{900-h^2}} = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{450}$$

$$A(30,\sqrt{450}) = 450 < 300\sqrt{3}.$$

c) ℓ_3 : $h=x$, $0 \le x \le 30$.

$g(x) = A(x,x) = (60-2x)x$, $g(0) = g(30) = 0$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 60-4x=0 \Leftrightarrow x=15$

$$A(15,15) = 450 < 300\sqrt{3}.$$

Svar: Största tvärsnittsarean $= 300\sqrt{3} \approx 519{,}6\ \text{cm}^2$

då $x = y = 20\ \text{cm}$ och $h = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3\ \text{cm}$.

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \quad (= 120°)$$