Fleridimensionell analys del I. kurstent 11.3.2019

Lös valbart **fem** av nedanstående **sex** uppgifter.

1. a) Ge definitionen på att avbildningen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är differentierbar i punkten $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$. Ge tillräckliga (icke-triviala) villkor som garanterar differentierbarhet i en punkt $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$. (3p)

   b) Har funktionen $f(x,y) = \frac{(x+\sin y)^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, ett gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$? (3p)

2. Visa att avbildningen $(u,v) = f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ har en kontinuerligt deriverbar invers i en omgivning av $(x,y) = (1,1)$. Bestäm för inversen den partiella derivatan y'_u i punkten $(u,v) = (0,2)$.

3. Derivera för $x > 0$ funktionen

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(x+y)}{y}\, dy\,.$$

4. Beräkna tangentplanen till ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ i punkterna $(1,1,1)$ och $(2,1,0)$, samt bestäm ekvationen för skärningslinjen mellan dessa tangentplan.

5. a) Transformera den partiella differentialekvationen

$$y\, f'_x(x,y) - x\, f'_y(x,y) = xyf(x,y)\,, \quad x > 0\,,\ y > 0\,,$$

   genom att införa de nya variablerna u och v bestämda av substitutionen

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2\,, \\ v = e^{-\frac{x^2}{2}}\,. \end{cases}$$

   tryckfel!
   borde vara $u = x^2 + y^2$

   b) Lös den transformerade ekvationen. (a)-delen 4p och b)-delen 2p).

6. Visa att ekvationen

$$x^3y + y^3 = xy - 1$$

   definierar y som en deriverbar funktion $y = y(x)$ i en omgivning av punkten $(1,-1)$ och bestäm $y''(1)$.

Flerdimensionell analys del I , 11.3.2019

1) a) Se föreläsningsanteckningar.

b) $f(x,y) = \dfrac{(x+\sin y)^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

Gränsvärde längs x-axeln: $(y=0)$

$$f(x,0) = \frac{(x+0)^2}{x^2+0^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \to 1, \text{ då } x \to 0.$$

Gränsvärde längs linjen $y = x$:

$$f(x,x) = \frac{(x+\sin x)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x}{2x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x} \to 2, \text{ då } x \to 0$$

Sum: Gränsvärde existerar ej då $(x,y) \to (0,0)$.

2) $(u,v) = f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

$u'_x = 2x$, $u'_y = -2y$, $v'_x = 2y$, $v'_y = 2x$

$\therefore$ Partiella derivator kontinuerliga i en omgivning av $(x,y) = (1,1)$.

$f'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det f'(1,1) = 4-(-4) = 8 \neq 0$.

$\therefore$ Sats 28: f har en kontinuerligt deriverbar invers i en omgivning av $(u,v) = (0,2)$.

$$(f^{-1})'(0,2) = (f'(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Så är $y'_u(0,2) = -\frac{1}{4}$.

3] Derivera för $x>0$ funktionen

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(x+y)}{y}\,dy.$$

Sätt: $f(x,y) = \frac{\ln(x+y)}{y}$.

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{y(x+y)}$$

f, f'_x kontinuerliga på $D = \{(x,y): 0<a\le x\le b,\ 0<c\le y\le d\}$

och $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=x^2$ deriverbara med värden i $[c,d]$.

Sats 33: $$I'(x) = \int_x^{x^2} f'_x(x,y)\,dy + f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{dy}{y(x+y)} + \frac{\ln(x+x^2)}{x^2}\cdot 2x - \frac{\ln(2x)}{x}\cdot 1$$

$$= \left[\frac{1}{y(x+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{x+y} = \frac{(A+B)y + Ax}{y(x+y)} \quad \therefore \begin{cases} A+B=0 \\ A=\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{x} \\ B=-\frac{1}{x} \end{cases} \right]$$

$$= \frac{1}{x}\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x+y}\right)dy + \frac{2}{x}\ln(x+x^2) - \frac{1}{x}\ln(2x)$$

$$= \frac{1}{x}\Big[\ln y - \ln(x+y)\Big]_x^{x^2} + \frac{2}{x}\ln(x+x^2) - \frac{1}{x}\ln(2x)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\ln x^2 - \ln(x+x^2) - \ln x + \ln(2x)\right) + \frac{2}{x}\ln(x+x^2) - \frac{1}{x}\ln(2x)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\ln\frac{x^2}{x} - \ln(x+x^2)\right) + \frac{2}{x}\ln(x+x^2)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\ln x + \ln(x+x^2)\right) = \underline{\underline{\frac{\ln(x^2+x^3)}{x}}}.$$

4] Beräkna tangentplanen till ellipsoiden

$$x^2+2y^2+3z^2=6$$

i punkterna $(1,1,1)$ och $(2,1,0)$, samt bestäm skärningslinjen mellan tangentplanen.

Lösning: $F(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2=6$, nivåyta.

$$\nabla F(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)$$

$$\begin{cases} \nabla F(1,1,1) = (2,4,6) \\ \nabla F(2,1,0) = (4,4,0) \end{cases}.$$

Tangentplanen:

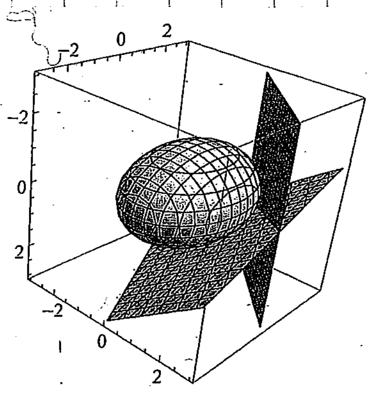
$$\begin{cases} (2,4,6)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0 \\ (4,4,0)\cdot(x-2,y-1,z-0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x+2y+3z=6}}, \\ \underline{\underline{x+y=3}}. \end{cases}$$

Skärningslinjen ges av systemet:

$$\begin{cases} x+2y+3z = 6 \\ x+y = 3 \end{cases}$$

I parameterform:

$$\underline{\underline{\begin{cases} x = t \\ y = 3-t \\ z = \frac{1}{3}(6-x-2y) = \frac{1}{3}\cdot t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}}}.$$



5 a) Transformera ekvationen

$(*)\quad y f'_x(x,y) - x\, f'_y(x,y) = xy\, f(x,y)\ ,\quad x>0,\ y>0,$

genom att införa variablerna u,v: $\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$.

Lösning: $(x,y) \mapsto f(u(x,y), v(x,y))$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = f'_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + f'_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = f'_u \cdot 2x - x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot f'_v \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = f'_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + f'_v \cdot \underbrace{\dfrac{\partial v}{\partial y}}_{=0} = f'_u \cdot 2y \end{cases}$$

Insättning i $(*)$ ger:

$$y(2x\cdot f'_u - x\, e^{-x^2/2} f'_v) - x\cdot 2y\cdot f'_u = xy\, f\ ,\quad x>0, y>0$$

$$\Leftrightarrow\ -xy\, e^{-x^2/2} f'_v = xy\, f\ ,\quad x>0,\ y>0$$

$$\Leftrightarrow\ f + e^{-x^2/2} f'_v = 0 \quad \Leftrightarrow\ f + v f'_v = 0 .$$

b) Lös ekvationen.

$$f + v f'_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dv}(v\cdot f) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad v\cdot f = g(u)\ ,\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ deriverbar funktion}.$$

Lösning till $(*)$:

$$f(x,y) = \frac{1}{v}\, g(u) = e^{x^2/2}\cdot g(x^2+y^2),$$

där $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriverbar funktion.

6 Visa att $x^3y + y^3 = xy - 1$ definierar y som en deriverbar funktion $y = y(x)$ i en omgivning av punkten $(1,-1)$ och bestäm $y''(1)$.

Lösning: Sätt $F(x,y) = x^3y + y^3 - xy + 1 = 0$

1°) $F(1,-1) = 1^3(-1) + (-1)^3 - 1\cdot(-1) + 1 = 0$ ✓

2°) $F'_x(x,y) = 3x^2y - y\ ,\ F'_y(x,y) = x^3 + 3y^2 - x$

F'_x, F'_y polynom, kontinuerliga i en omgivning av $(1,-1)$, (i hela $\mathbb{R}^2$). ✓

3°) $F'_y(1,-1) = 1^3 + 3(-1)^2 - 1 = 3 \neq 0$ ✓

Sats 29: $F(x,y) = 0$ definierar y som deriverbar funktion $y = y(x)$ i en omgivning av $(1,0)$.

Implicit derivering av $F(x, y(x)) = 0$ ger: $(y(1) = -1)$

$$F'_x(x,y(x))\cdot \frac{dx}{dx} + F'_y(x,y(x))\cdot y'(x) = 0$$

$$\therefore\ y'(x) = -\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))} = -\frac{3x^2\cdot y(x) - y(x)}{x^3 + 3y(x)^2 - x}$$

$$\therefore\ y'(1) = -\frac{3\cdot 1^2\cdot(-1) - (-1)}{1^3 + 3\cdot(-1)^2 - 1} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)(1-3x^2)}{x^3 - x + 3y(x)^2}\right)$$

$$= \{(x^3 - x + 3y(x)^2)\cdot(y'(x)(1-3x^2) - y(x)\cdot 6x) - (3x^2 - 1 + 6y(x)\cdot y'(x))\cdot y(x)(1-3x^2)\} / (x^3 - x + 3y(x)^2)^2$$

$$\therefore\ y''(1) = \{(1^3 - 1 + 3\cdot(-1)^2)\cdot(\tfrac{2}{3}(1 - 3\cdot 1^2) - (-1)\cdot 6\cdot 1) - (3\cdot 1^2 - 1 + 6\cdot(-1)\cdot\tfrac{2}{3})\cdot(-1)\cdot(1 - 3\cdot 1^2)\} / (1^3 - 1 + 3(-1)^2)^2$$

$$= \frac{3\cdot(-\frac{4}{3} + 6) - (2-4)\cdot 2}{3^2} = \frac{18}{9} = 2.$$