Flerdimensionell analys del II. kurstent 15.5.2019

Lös valbart **fem** av nedanstående **sex** uppgifter.

1. Bestäm i första oktanten $D = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ det största värdet av funktionen $f(x,y,z) = 8xyz$ under bivillkoret $g(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

2. a) Hur lyder Greens formel och under vilka antaganden gäller den? (3p)

   b) För vilka värden på de reella parametrarna a och b är kraftfältet $\overline{F}(x,y) = (a^2y^2\sin(ax) + \frac{x^3y^3}{3}, y\cos(ax) + bx^4y^2)$ konservativt i $\mathbb{R}^2$?(3p)

3. Undersök om den generaliserade dubbelintegralen
$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^4},$$
   där $D = \{(x,y) : x \geq 1, y \geq 0\}$, är konvergent och bestäm i så fall dess värde.

4. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 3 med ordorestterm i punkten $(1,0)$ av funktionen $f(x,y) = e^{x-1}\arctan y$. Ange även Taylorpolynomet av ordning 3 för utvecklingen, som funktion av x och y.

5. Låt ytan S vara övre halvan av enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, dvs. $0 < z \leq 1$. Beräkna ytintegralen
$$\iint_S xz\,dydz + yz\,dzdx,$$
   då ytnormalerna är riktade utåt sett från origo.

6. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\Gamma (x^2 - y + 2\ln(1+y))\,dx + \frac{(1+x)^2}{1+y}\,dy,$$
   där Γ är övre halvan av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ genomlöpt från punkten $(1,0)$ till punkten $(-1,0)$.

Flerdimensionell analys, del 2, kurstent 15.5.19

1] Bestäm i $D = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ det största värdet av $f(x,y,z) = 8xyz$ under bivillkoret $g(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

Lösning:

Mängden $D \cap \{(x,y,z) : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\}$ är kompakt, (sluten och begränsad) så den kontinuerliga funktionen f antar ett maximum på mängden.

Tillämpar Lagranges multiplikatormetod, Sats 46:

$$\nabla f = (8yz, 8xz, 8xy), \quad \nabla g = (2x, \tfrac{y}{2}, \tfrac{2}{9}z).$$

Villkor (B): $\begin{cases} \nabla g(\overline{x}) = \overline{0} \\ g(\overline{x}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}, \frac{2}{9}z) = (0,0,0) \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \end{cases}$

Saknar lösningar!

Villkor (A): Kan anta $x > 0, y > 0, z > 0$.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8yz = \lambda 2x \\ 8xz = \lambda y/2 \\ 8xy = \lambda 2z/9 \\ g(\overline{x}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8xyz = \lambda 2x^2 \\ 8xyz = \lambda y^2/2 \\ 8xyz = \lambda 2z^2/9 \\ g(\overline{x}) = 1 \end{cases}$$

Detta ger: $\begin{cases} \lambda 2x^2 = \lambda \frac{y^2}{2} \\ \lambda 2x^2 = \lambda 2z^2/9 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{4} = x^2 \text{ och } \frac{z^2}{9} = x^2\right)$

Då ger bivillkoret: $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \stackrel{+}{(-)}\frac{1}{\sqrt{3}}$

Alltså: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\begin{cases} y^2/4 = x^2 = \frac{1}{3} \\ z^2/9 = x^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \stackrel{+}{(-)}\frac{2}{\sqrt{3}} \\ z = \stackrel{+}{(-)}\sqrt{3} \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \text{Det största värdet antas i punkten } (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}) \\ f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}) = 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \quad (\approx 9{,}24) \end{cases}$

2. a) Se föreläsningsanteckningar

b) $\bar{F}(x,y) = \left(a^2y^2\sin(ax) + \frac{x^3}{3}y^3,\ y\cos(ax) + bx^4y^2\right)$,

$a, b \in \mathbb{R}$.

Sätt: $\begin{cases} P(x,y) = a^2y^2\sin(ax) + \frac{x^3}{3}y^3 \\ Q(x,y) = y\cos(ax) + bx^4y^2 \end{cases}$

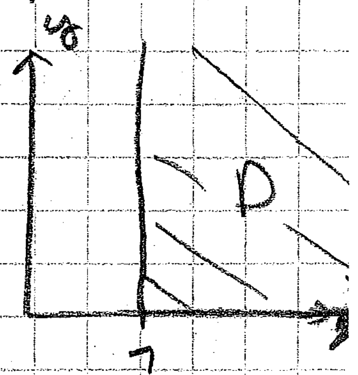
$\begin{cases} P'_y = 2a^2y\sin(ax) + x^3y^2 \\ Q'_x = -ay\sin(ax) + 4bx^3y^2 \end{cases}$

P, Q, P'_y, Q'_x kontinuerliga i det enkelt sammanhängande området $\mathbb{R}^2$.

$\therefore$ Sats 69: Fältet konservativt om $P'_y = Q'_x$.

$\therefore$ $P'_y = Q'_x \iff \begin{cases} 2a^2 = -a \\ 4b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \vee a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$.

3] Undersök om den generaliserade dubbelintegralen $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x+y)^4}$ där $D = \{(x,y) : x \geq 1,\ y \geq 0\}$ är konvergent och bestäm i så fall dess värde.



Lösning: $f(x,y)$ har konstant tecken (>0) i D, och är kontinuerlig i D.

Fubini's sats, Sats 64:

Om den senare integralen konvergerar

$$I = \iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x+y)^4} = \int_1^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dy}{(1+x+y)^4} \right) dx$$

$$= \int_1^\infty \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+x+y)^3} \right]_0^b dx$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{3} \cdot \frac{dx}{(1+x)^3}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \right]_1^b$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1+1)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{24}.$$

4] Taylorutvecklingen av ordning 3 i $(1,0)$ till $f(x,y) = e^{x-1} \arctan y$.

Lösning:
$$\begin{cases} e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(t^4) \\ \arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \mathcal{O}(t^5) \end{cases}$$

Sätt: $\begin{cases} x = 1 + h \\ y = 0 + k \end{cases}$ och $r = \sqrt{h^2 + k^2}$

$$\begin{cases} e^{x-1} = e^{1+h-1} = e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \underbrace{\mathcal{O}(h^4)}_{= \mathcal{O}(r^4)} \\ \arctan y = \arctan k = k - \frac{k^3}{3} + \underbrace{\mathcal{O}(k^5)}_{= \mathcal{O}(r^5)} \end{cases}$$

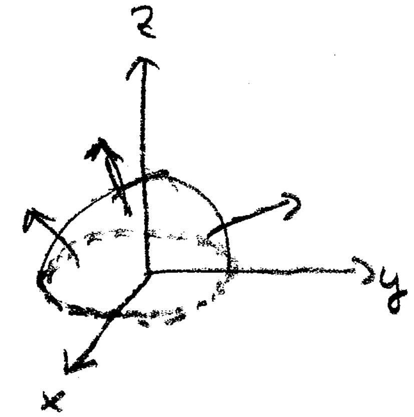
$$\therefore\ \underline{f(x,y) = f(1+h,k)} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \mathcal{O}(r^4)\right)\left(k - \frac{k^3}{3} + \mathcal{O}(r^5)\right)$$
$$= \underbrace{k - \frac{k^3}{3} + hk + \frac{1}{2}h^2 k}_{P_3(h,k)} + \mathcal{O}(r^4)$$

$P_3(h,k)$, Entydighetssatsen, Sats 30

$$\therefore\ \underline{P_3(x,y)} = y - \frac{y^3}{3} + (x-1)y + \frac{1}{2}(x-1)^2 y$$
$$= \cancel{y} - \frac{y^3}{3} + \cancel{xy} - \cancel{y} + \frac{1}{2}(x^2 - \cancel{2x} + 1)y$$
$$= \frac{1}{2}(1 + x^2)y - \frac{1}{3}y^3.$$
$$= \frac{y}{6}(3 + 3x^2 - 2y^2).$$

5.] Låt ytan S vara övre halvan av enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, dvs. $0 < z \leq 1$. Beräkna ytintegralen
$$\iint_S xz\,dydz + yz\,dzdx,$$
då ytnormalerna är riktade utåt från origo.

Lösning: Parametrisera ytan S genom:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \sqrt{1 - r^2} \end{cases} \qquad D: \begin{cases} 0 < r < 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d(y,z)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} \\ \dfrac{d(z,x)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} & 0 \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = \dfrac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}} \\ \dfrac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \end{cases}$$

$$\therefore\ \underline{\overline{r}'_r \times \overline{r}'_\theta} = \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}, \underbrace{r}_{>0}\right) \neq \overline{0}.$$

$\therefore$ Normalriktningen utåt från origo.

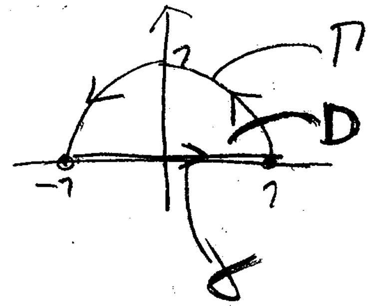
$$\underline{\iint_S xz\,dydz + yz\,dzdx} = \iint_D \left\{ r\cos\theta \cdot \sqrt{1-r^2} \cdot \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} + r\sin\theta \cdot \sqrt{1-r^2} \cdot \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}} \right\} dr d\theta$$

$$= \iint_D r^3\,dr d\theta = \int_0^1 r^3\left(\int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta\right)dr = 2\pi\int_0^1 r^3\,dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

6. Beräkna $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 - y + 2\ln(1+y))\,dx + \frac{(1+x)^2}{1+y}\,dy$

Γ övre halvan av enhetscirkeln $x^2+y^2=1$ genomlöpt från $(1,0)$ till $(-1,0)$.



Lösning:

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2 - y + 2\ln(1+y), \\ Q(x,y) = \dfrac{(1+x)^2}{1+y}. \end{cases}$$

$\Gamma + \gamma$ är en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis reguljär kurva av ändlig längd

P, Q, P'_y, Q'_x är kontinuerliga på $\overline{D} = D \cup (\Gamma+\gamma)$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2(1+x)}{1+y} - \left(-1 + \frac{2}{1+y}\right) = 1 + \frac{2x}{1+y}$$

Greens formel: $\displaystyle\int_{\Gamma+\gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\overline{D}} \left(1 + \frac{2x}{1+y}\right) dx\,dy$

$$= \underbrace{\iint_{\overline{D}} 1\cdot dx\,dy}_{\substack{\text{arean av halva}\\ \text{enhetscirkelskivan } D \\ = \pi/2}} + \iint_{\overline{D}} \frac{2x}{1+y}\,dx\,dy = \frac{\pi}{2} + \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2x}{1+y}\,dx \right) dy$$

$$= \frac{\pi}{2} + \int_0^1 \left[\frac{x^2}{1+y} \right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{\pi}{2} + \int_0^1 0 \cdot dy = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy \underset{\substack{x(t)=t \\ y(t)=0 \\ t: -1 \to 1}}{=} \int_{-1}^{1} \Big(\underbrace{t^2 \cdot 1 + (1+t)^2 \cdot 0}_{=t^2}\Big)\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

Svar: $\displaystyle\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma+\gamma} - \int_\gamma = \underline{\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}}.$