Hemuppgifter till fredagen den 2 mars

Exercises for Friday, March 2

1.

Newtons metod

Betrakta Newtons metod (också kallad *Newton-Raphsons* metod) att beräkna nollställena till funktionen $\cos x$, vilket ger upphov till det dynamiska systemet $x_{n+1} = x_n + \cot x_n$ på $\mathbf{R}$. Visa att det i $[-\pi, \pi]$ finns oändligt många begynnelsevärden x_0 för vilka det dynamiska systemet stoppar upp efter ändligt många steg (genom att x_n hoppar ur definitionsområdet för $\cot x$). Dessa punkter är dock "få", komplementmängden ligger tätt i $\mathbf{R}$. Visa detta! Intuitivt geometriskt resonemang räcker.

Har systemet andra periodiska punkter än fixpunkter? Beskriv dem i så fall geometriskt och undersök om de är attraherande, repellerande eller icke-hyperboliska.

Ref.: S. Bjon m. fl., *Numerisk och diskret matematik*, Andra uppl., Sigma vid Åbo Akademi 1989, Kap. 4.

Newton's Method

Consider Newton's method of finding the zeros of the function $\cos x$, which gives rise to the dynamical system $x_{n+1} = x_n + \cot x_n$ on $\mathbf{R}$. Show that there are infinitely many initial values x_0 in $[-\pi, \pi]$ such that the dynamical system stops after only finitely many steps (because x_n lies outside the domain of definition of $\cot x$). There are only "few" of those points, however, as the complement is dense in $\mathbf{R}$. Show this by reasoning in an intuitive geometric way. - Does the system have other periodic points beside the fixed points? In case there are, describe them geometrically and determine if they are attracting, repelling or non-hyperbolic.

2. Betrakta följande differensekvationssystem av *Lotka-Volterra*-typ:

$$x_{n+1} = ax_n - bx_ny_n,$$
$$y_{n+1} = dy_n + cx_ny_n$$

för olika värden på parametrarna. Dylika *rovdjur och bytesmodeller* används i ekologi, epidemiologi etc., oftast i kontinuerlig tid. Bytespopulationens storlek (täthet) vid tiden n betecknas x_n och rovdjurspopulationens y_n. Oftast väljs $a > 1$ (exponentiell tillväxt då rovdjur saknas) och $0 < d < 1$ (rovdjuren minskar exponentiellt då mat saknas).

Uppgiften är att studera detta system (med avseende på fixpunkter, sadelpunkter, attraktorer, asymptotiskt beteende osv.) för olika val av icke-negativa koefficienter $a > 1, b, c, d < 1$. Försök välja ett par "typiska" fall.

Consider the following system of difference equations of *Lotka-Volterra* type

$$x_{n+1} = ax_n - bx_ny_n,$$
$$y_{n+1} = dy_n + cx_ny_n$$

for different values of the parameters. Such *predator-prey models* are widely used in ecology, epidemiology etc., often in continuous time. The prey population density at time n is denoted by x_n while y_n is the density of the predator population. Usually we take $a > 1$ (exponential growth in the absence of predators) and $0 < d < 1$ (the predator population decreases exponentially if there is no prey for food).

Your task is to study this system with regard to fixed points, saddles, attractors, asymptotics etc. for different choices of the non-negative parameters $a > 1, b, c, d < 1$. Try to choose a couple of "typical" cases.