Introduktion till dynamiska system Period 3, 2012

Introduction to Dynamical Systems

Hemuppgifter till fredagen den 10 februari

Exercises for Friday, February 10

1. Låt $f(x) = \lambda x$ och $g(x) = \mu x$ där $0 < \lambda < \mu < 1$ och $x \in \Re$. Visa att f och g är topologiskt konjugerade.

Let $f(x) = \lambda x$ and $g(x) = \mu x$ where $0 < \lambda < \mu < 1$ and $x \in \Re$. Show that f and g are topologically conjugate.

2. Låt $a_1 = 1$, $a_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ och

$$(*) \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \;\; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Bestäm a_n. Beräkna också $a_n, n = 60, 70, 80, 90$ *numeriskt* med användning av (*).

Ref. kapitlet om linjära differensekvationer i Bjon et al.: *Numerisk och diskret matematik*, övningsuppgifterna sid. 90-91.

Let the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be defined by $a_1 = 1$, $a_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ and (*).

What is a_n? Calculate also $a_n, n = 60, 70, 80, 90$ *numerically* using (*).

3. (Exerc. 2, p. 47) En punkt p är *icke-vandrande* (non-wandering) för f om det för varje öppet intervall J innehållande p finns ett $n > 0$ och ett $x \in J$ så att $f^n(x) \in J$. [Observera att det inte krävs att punkten p själv återkommer till J.] Låt $\Omega(f)$ vara mängden icke-vandrande punkter för f.

a. Bevisa att $\Omega(f)$ är en sluten mängd.

b. Om F_μ betecknar en logistisk avbildning med $\mu > 2 + \sqrt{5}$, visa att $\Omega(F_\mu) = \Lambda$.

c. Identifiera $\Omega(F_\mu)$ för $0 < \mu \leq 3$.

A point p is a *non-wandering* point for f, if, for any open interval J containing p, there exists $x \in J$ and $n > 0$ such that $f^n(x) \in J$. Note that we do not require that p itself return to J. Let $\Omega(f)$ be the set of non-wandering points for f.

a. Prove that $\Omega(f)$ is a closed set.

b. If F_μ is the quadratic map with $\mu > 2 + \sqrt{5}$, show that $\Omega(F_\mu) = \Lambda$.

c. Identify $\Omega(F_\mu)$ for each μ satisfying $0 < \mu \leq 3$.

4. (Exerc. 3, p. 48) En punkt p är *rekurrent* om det för varje intervall $J \ni p$ finns ett $n > 0$ så att $f^n(p) \in J$. Alla periodiska punkter är rekurrenta.

a. Ge ett exempel på en icke-periodisk rekurrent punkt för F_μ, $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

b. Ge ett exempel på en icke-vandrande punkt som inte är rekurrent.

A point p is *recurrent* for f if, for any open interval J about p, there exists $n > 0$ such that $f^n(p) \in J$. Clearly, all periodic points are recurrent.

a. Give an example of a non-periodic recurrent point for F_μ when $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

b. Give an example of a non-wandering point for F_μ which is not recurrent.