Introduktion till dynamiska system Period 1, 2009

Introduction to Dynamical Systems

Hänvisningarna är till Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*

References and exercises are taken from the text book Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*

Viktiga begrepp - Important terminology

Kap. 1.1. Exempel på dynamiska system - Examples of Dynamical Systems

iteration av funktioner - iteration of functions, $x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, 2, \ldots$

linjär differensekvation - linear difference equation

Newtons metod (för ekvationslösning) - Newton's method (of solving equations)

Kap 1.2. Basfakta från analysen - Preliminaries from Calculus

$\Re$, $\Re^2$, $\Re^n$

differentierbara funktioner - differentiable functions, f', f'', $f^{(r)}$

klasserna - the classes C^1, C^2, C^r, C^∞, "släta" funktioner - smooth functions

linjära funktioner - linear functions, affina funktioner - affine functions, styckevis linjära funktioner - piecewise linear functions, styckevis - piecewise C^2

injektiv - injective, surjektiv - surjective, bijektiv - bijective, invers - inverse

homeomorfi(sm) - homeomorphism (Def. 2.3)

C^r-diffeomorfism - diffeomorphism (Def. 2.4)

funktionssammansättning - composition of functions $f \circ g$

Kedjeregeln - The Chain Rule (Prop. 2.5)

Medelvärdessatsen - The Mean Value Theorem (Theor. 2.6)

Satsen om mellanliggande värden - The Intermediate Value Theorem (Theor. 2.7)

Implicita funktioners huvudsats - The Implicit Function Theorem (Theor. 2.8)

fixpunktssatser - Fixed Point Theorems (Prop. 2.11 och 2.12)

hopningspunkt - limit point, sluten mängd - closed set (Def. 2.13)

öppen mängd - open set (Def. 2.15)

tät delmängd - dense subset (Def. 2.16)

Kap 1.3. Elementära definitioner - Elementary Definitions

bana - orbit $O(x)$, framåt bana - forward orbit $O^+(x)$, bakåt bana - backward orbit $O^-(x)$ (Def. 3.1)

fixpunkt - fixed point, periodisk punkt - periodic point , period, fundamental period, $\mathrm{Fix}(f)$, $\mathrm{Per}_n(f)$ (Def. 3.2)

slutligen periodisk punkt - eventually periodic point (Def. 3.5)

asymptotiska punkter - asymptotic points, stabila mängden för p - the stable set of p, $W^s(p)$ (Def. 3.8) bakåt asymptotiska punkter - backward asymptotic points, instabila mängden för p - the unstable set of p, $W^u(p)$

kritisk punkt - critical point, degeneration

fasdiagram - phase diagram, fasporträtt - phase portrait

irrationella rotationer - irrational rotations (Theor. 3.13)

Kap 1.4. Hyperbolicitet - Hyperbolicity

hyperbolisk punkt - hyperbolic point, multiplikator - multiplier (Def. 2.1)

attraktor - attractor (sink), attraherande (tilldragande) periodisk punkt (resp. fixpunkt) - attracting periodic point (fixed point) (Prop. 4.4, Def. 4.5)

lokal stabil mängd - local stable set W^s_{loc}

repellerande (frånstötande) periodisk punkt (fixpunkt) - repelling periodic point (fixed point), repellor (source) (Prop. 4.6, Def. 4.7)

lokal instabil mängd - local unstable set W^u_{loc}

svagt repellerande - weakly repelling, svagt attraherande - weakly attracting (Ex. 4.8)

logistiska avbildningen - logistic map F_μ, $\quad F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ (Ex. 4.10)

bifurkation - bifurcation (Ex. 4.10)

Kap. 1.5. Logistiska avbildningarna - The Quadratic Family och senare avsnitt - and later sections

Cantormängden, Cantors ternära mängd - The Cantor Middle-Thirds Set (Ternary Set) (Ex. 5.5)

Cantor, Georg (1845-1918) tysk matematiker, verksam i Berlin och Halle

topologisk konjugering - topological conjugacy (Def. 7.4)

strukturell stabilitet - structural stability (Chap. 1.9)

periodernas ordningsföljd - ordering of the periods (Sjarkovskijs teorem - Sharkovskii's Theorem, Theor. 10.2)

A. N. Sjarkovskij (Sharkovskii, Sharkovsky), ukrainsk matematiker.

bifurkationsdiagram - bifurcation diagram (Chap. 1.17)

Hemuppgifter till fredagen den 18 september

Exercises for Friday, September 18

Hänvisningarna är till Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*

References and exercises are taken from the text book Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*

Obs! Använd OH-stordior då du presenterar dina hemuppgifter. Kan fås från Matematiska institutionens kansli eller av mig.

N. B. Use overhead projector films for your presentations. Films are available at the Department office. Or you can ask me.

1. Konstruera en "iterator", dvs. skriv ett program som successivt genererar $x_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ definierat genom

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, 2, \ldots$$

där f är en given funktion och begynnelsevärdet x_0 ett givet reellt tal. Valfritt programpaket.

Construct an "iterator", i. e., write a program, in the programming package of your choice, to generate successively $x_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ defined by

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, 2, \ldots$$

where f is a given function and the initial value x_0 a given real number.

2. Verifiera Theorem 3.13 (Jacobis teorem) experimentellt.

[**Jacobi, Carl Gustav Jacob** (1804-1851) tysk matematiker, verksam i Berlin och Königsberg (nuv. Kaliningrad)]

Verify Theorem 3.13 (Jacobi's Theorem) numerically.

3. (Problem 1/ p. 29-30.) Sök alla periodiska punkter till följande avbildningar och avgör om de är attraherande, repellerande eller icke-hyperboliska. Skissera fasporträtten.

Find all the periodic points for each of the following maps and classify them as attracting, repelling, or neither. Sketch the phase portraits.

c. $f(x) = x^3 - \frac{1}{9}x$

d. $f(x) = x^3 - x$

j. $A(x) = \frac{\pi}{4} \arctan x$.

k. $A(x) = -\frac{\pi}{4} \arctan x$.

4. (Problem 3/p. 38.) Betrakta den s. k. tältavbildningen

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{om } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & \text{om } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Utnyttja funktionskurvan för T_2^n för att visa att T_2 har exakt 2^n periodiska punkter med perioden n.

Consider the tent map T_2. Use the graph of T_2^n to conclude that T_2 has exactly 2^n periodic points of period n.

5. (Problem 4/p. 39.) Visa att mängden periodiska punkter till T_2 ligger tätt i intervallet [0,1].

Prove that the set of all periodic points of T_2 are dense in [0,1].

6. Betrakta det dynamiska systemet definierat av funktionen $-\sin x$. Antag vidare att räkningarna utförs med precisionen 0.0001, dvs. alla tal avrundas till närmaste multipel av 0.0001. Visa att systemet har en punkt med perioden 2.

Consider the dynamical system defined by the function $-\sin x$. Assume further that the calculations are made with the precision 0.0001, i. e., all numbers are rounded to the nearest multiple of 0.0001. Show that the system has a point with prime period 2.

7. (Extra) Det dynamiska systemet definierat av funktionen $\sin x$ konvergerar mot 0.

Efter ungefär hur många steg är avståndet till origo mindre än 10^{-5} ? Samma fråga för $\frac{1}{2}\sin x$.

The dynamical system defined by the function $\sin x$ converges to 0.

About how many iterations are needed in order for x_n to be closer than 10^{-5} to the origin? Same questions for $\frac{1}{2}\sin x$.

Hemarbete A. Rickers modell. Hållbar avkastning

Assignment A. Ricker's model. Sustainable yield

Hemarbete A genomgås på klass **torsdagen den 1 oktober**. Då berättar ni ungefär hur ni har tänkt lösa uppgiften. Ni får gärna samarbeta om projektet men den obligatoriska skriftliga rapporten är individuell. Den skall inlämnas senast **fredagen den 16 oktober**.

The Assignment A will be discussed in class on **Thursday, October 1**. There you give a rough sketch of your solution method. Cooperation with other participants is allowed, even encouraged. However, everybody is to hand in an individual written report. Deadline is **Friday, October 16**.

Många av de enkla matematiska modeller som ekologerna länge använt har visat sig vara ytterst intressanta då de betraktas som dynamiska system. Robert M. May (numera adlad Lord May) publicerade år 1976 en artikel som haft ett oerhört inflytande "Simple mathematical models with very complicated dynamics" *Nature* **261**, p.459, June 10 1976. Finns på

http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5/Sept01/May/

(klicka på knappen contents.html)

En av dessa lanserades av den kanadensiska fiskeribiologen W. E. Ricker (1908-2001) år 1954:

$$x_{n+1} = x_n \exp(r - \gamma x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, x_0 > 0$$

som beskriver en populations utveckling med tiden. x_n representerar populationstätheten vid tiden (generationen) n, parametern $r > 0$ beskriver tillväxten vid låg populationstäthet och $\gamma > 0$ är en miljöparameter. (Vi kan utan att ge avkall på allmängiltigheten sätta $\gamma = 1$: substituera γx som ny variabel.)

1. Låt $f(x) = x \exp(r - x), x > 0$ och alltså $x_{n+1} = f(x_n)$. Undersök systemets fixpunkter. När är de attraherande resp. repellerande?

2. Bestäm analytiskt eller numeriskt de värden på r för vilka det finns en attraherande 2-period.

3. Bestäm analytiskt eller numeriskt de värden på r för vilka det finns en attraherande 3-period. I detta fall finns det, enligt Sjarkovskis teorem, oändligt många andra perioder.

4. För ett givet $r > 0$ har *alla* perioder samma medeltal r. Visa detta!

5. Vi tänker oss nu att vi *skördar* (eller fångar) en viss del av populationen. Vid varje tidpunkt n tar vi bort en mängd y_n från populationen. Detta önskar vi göra på ett ansvarsfullt sätt, allra helst så att vi optimerar avkastningen på lång sikt.

Matematiskt kan vi modellera processen på följande sätt: Om populationstätheten vid tiden n före skörden är x_n och skörden är y_n ($\leq x_n$) så är den efter skörden $x_n - y_n \geq 0$. Vid tiden $n+1$ är den då (då den antas följa Rickers modell)

$$(x_n - y_n) \exp(r - (x_n - y_n))$$

före skörden och

$$(x_n - y_n) \exp(r - (x_n - y_n)) - y_{n+1}$$

efter skörden.

6. Experimentera med olika strategier. Undersök analytiskt eller numeriskt medelavkastningen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k$ för t. ex.

$y_n = \beta * x_n$ där $\beta < 1$,

$y_n = \min(c, x_n)$ där c är en konstant.

7. Låt r vara dels 0.8, dels 2.2. Sök en så bra skördestrategi y_n som möjligt.

8. Evaluera den i 7. erhållna strategin. Är den robust med avseende på slumpmässiga fluktuationer eller felaktig uppskattning av x_n? Verkar den stabiliserande eller destabiliserande på populationen?

Many of the simple mathematical used by theoretical ecologists have proved to be very interesting from the dynamical systems point of view. Robert M. May (nowadays Lord May) published in 1976 a hugely influential paper "Simple mathematical models with very complicated dynamics" *Nature* **261**, p.459, June 10 1976. Can be found on the web page

http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5/Sept01/May/

(click the contents.html button)

One of these models was introduced by the Canadian fisheries biologist W. E. Ricker (1908-2001) in 1954:

$$x_{n+1} = x_n \exp(r - \gamma x_n), \;\; n = 0, 1, 2, \ldots, x_0 > 0$$

describing the evolution of a population over time. x_n represents population density at time (in generation) n, the parameter $r > 0$ describes the growth at low densities and $\gamma > 0$ is an environmental parameter. (Without loss of generality we can put $\gamma = 1$: just substitute γx as new variable.)

1. Let $f(x) = x \exp(r - x), x > 0$. Thus $x_{n+1} = f(x_n)$. Find the fixed points of the system. When are they attracting and repelling, respectively?

2. Determine analytically or numerically the values of r for which there is an attracting 2-period.

3. Determine analytically or numerically the values of r for which there is an attracting 3-period. In this case, Sharkovskii's Theorem shows that there are infinitely many other periods.

4. For a given $r > 0$ *all* periods have the same average r. Show this!

5. We now imagine that we *harvest* (or catch or cull) part of the population. At each time n we remove y_n from the population. We wish to do this in a responsible manner, preferably in such a way as to optimize (maximize) the long-term yield.

Mathematically we can model the process as follows: If the population density at time n before the harvest is x_n and the harvest is y_n $(\leq x_n)$ then it is $x_n - y_n \geq 0$ after the harvest. At time $n + 1$ it is (following the Ricker model)

$$(x_n - y_n) \exp(r - (x_n - y_n))$$

before the harvest and

$$(x_n - y_n) \exp(r - (x_n - y_n)) - y_{n+1}$$

after the harvest.

6. Do experiments with different harvesting strategies. Study analytically or numericaly the average long-term yield $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k$ for, e. g.,

$y_n = \beta * x_n$ where $\beta < 1$,

$y_n = \min(c, x_n)$ where c is a constant.

7. Consider two values of r, 0.8 and 2.2. Try to find an optimal harvesting strategy for these cases.

8. Evaluate the strategy found in 7. Is it robust with respect to random fluctuations or errors in estimation of x_n? Is it stabilizing or destabilizing the population?

Introduktion till dynamiska system Period 1, 2009

Introduction to Dynamical Systems

Hemuppgifter till fredagen den 25 september

Exercises for Friday, September 25

Genomgås kl. 11-12. Kl. 10-11 normal föreläsning.

From 10 to 11 we have normal lecture, from 11 to 12 exercise session.

Obs! Använd OH-stordior då du presenterar dina hemuppgifter. Kan fås från Matematiska institutionens kansli eller av mig.

N. B. Use overhead projector films for your presentations. Films are available at the Department office. Or you can ask me.

Problem 1. (Exerc. 1, p. 47) Låt $Q_c(x) = x^2 + c$. Bevisa att om $c < \frac{1}{4}$ så finns det ett entydigt bestämt $\mu > 1$ sådant att Q_c är topologiskt konjugerat med $F_\mu = \mu x(1-x)$ via en avbildning av formen $h(x) = \alpha x + \beta$.

Let $Q_c(x) = x^2 + c$. Prove that if $c < \frac{1}{4}$, there is a unique $\mu > 1$ such that Q_c is topologically conjugate to $F_\mu = \mu x(1-x)$ via a map of the form $h(x) = \alpha x + \beta$.

Problem 2. Visa att avbildningen $f(x) = xe^{r-\gamma x}$, $x \geq 0$ $(r > 0, \gamma > 0)$ är topologiskt konjugerad med $g(y) = yme^{-y}$, $y \geq 0$ $(m > 1)$.

Show that the map $f(x) = xe^{r-\gamma x}$, $x \geq 0$ $(r > 0, \gamma > 0)$ is topologically conjugate to $g(y) = yme^{-y}$, $y \geq 0$ $(m > 1)$.

3. (Problem 5/p. 39.) Betrakta den s. k. bagaravbildningen

$$B(x) = \begin{cases} 2x, & \text{om } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2x - 1, & \text{om } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} .$$

Hur många periodiska punkter med perioden n har B ?

Consider the *baker map* $B(x)$. How many periodic points of period n does B have?

4. (cf. Exerc. 4, p. 43)

Låt Σ' bestå av alla följder i Σ_2 som uppfyller: om $s_j = 0$ så $s_{j+1} = 1$. Med andra ord består Σ' av de följder i Σ_2 som aldrig har två nollor efter varann.

(a) Visa att σ avbildar Σ' på sig själv och att Σ' är en sluten delmängd av Σ_2.

(b) Visa att de periodiska punkterna för σ ligger tätt i Σ'.

(c) Visa att Σ' inte innehåller någon öppen mängd.

Let Σ' consist of all sequences in Σ_2 satisfying: if $s_j = 0$ then $s_{j+1} = 1$. In other words, Σ' consists of only those sequences in Σ_2 which never have two consecutive zeros.

(a) Show that σ preserves Σ' and that Σ' is a closed subset of Σ_2.

(b) Show that periodic points of σ are dense in Σ'.

(c) Show that Σ' contains no open set.

Hemuppgifter till fredagen den 9 oktober

Exercises for Friday, October 9

1. Låt $f(x) = \lambda x$ och $g(x) = \mu x$ där $0 < \lambda < \mu < 1$ och $x \in \Re$. Visa att f och g är topologiskt konjugerade.

Let $f(x) = \lambda x$ and $g(x) = \mu x$ where $0 < \lambda < \mu < 1$ and $x \in \Re$. Show that f and g are topologically conjugate.

2. Låt $a_1 = 1$, $a_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ och

$$(*) \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Bestäm a_n. Beräkna också $a_n, n = 60, 70, 80, 90$ *numeriskt* med användning av (*).

Ref. kapitlet om linjära differensekvationer i Bjon et al.: *Numerisk och diskret matematik*, övningsuppgifterna sid. 90-91.

Let the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be defined by $a_1 = 1$, $a_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ and (*).

What is a_n? Calculate also $a_n, n = 60, 70, 80, 90$ *numerically* using (*).

3.

Komplexa affina avbildningar

Låt f vara en komplex affin avbildning: $f(z) = az + b, z$ komplext, där a och b också antas vara komplexa och $|a| < 1$.

Undersök om systemet har fixpunkter och periodiska punkter samt när dessa är attraktiva eller repellerande. Visa speciellt att banan $\{f^n(z_0)\}$asymptotiskt i huvudsak beror av a och inte nämnvärt av begynnelsevärdet z_0. Beskriv banan för några speciella värden på a.

Complex Affine Maps

Let f be a complex affine map: $f(z) = az + b, z$ complex, where a and b are assumed to be complex and $|a| < 1$.

Does the system have fixed points and periodic points? If so, determine whether they are attracting or repelling. Show in particular that the asymptotics of the forward orbit $\{f^n(z_0)\}$ principally depends on a and very little on the initial value z_0. Describe the orbit for some special values of a.

4. (jfr. Exercise 1, p. 172) Sök alla egenvärden och egenvektorer till följande matriser

(cf. Exercise 1, p. 172) Find all eigenvalues and eigenvectors of the following matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \Re$$

(flera olika fall beroende av a och b / several different cases depending on the choice of a and b.)

5. (Exercise 2, p. 172) Använd egenvärdena och egenvektorerna beräknade i Problem 4 för att konstruera standardformerna för var och en av dessa matriser.

Use the eigenvalues and eigenvectors computed in Problem 4 to construct the standard forms for each of these matrices.

6. Extra. Låt funktionen ϕ avbilda det komplexa talet $\alpha + \mathrm{i}\beta$ på matrisen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Visa att ϕ en homomorfi dvs. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ och $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ för alla $x, y \in \mathbf{C}$. Undersök speciellt fallet då y är komplexa konjugatet av x. Vad för slags matris är $\phi(x)$ då $|x| = 1$?

Let the function ϕ map the complex number $\alpha + \mathrm{i}\beta$ onto the matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Show that ϕ is a homomorphism, i. e., $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ and $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ för alla $x, y \in \mathbf{C}$. Investigate in particular the case when y is the complex conjugate of x. What kind of matrix $\phi(x)$ do we get when $|x| = 1$?

Hemarbete B

Assignment B

Hemarbete B genomgås på klass **måndagen den 19 oktober, kl. 10-11**. Då berättar ni ungefär hur ni har tänkt lösa uppgiften. Ni får gärna samarbeta om projektet men den obligatoriska skriftliga rapporten är individuell. Den skall inlämnas senast **fredagen den 30 oktober**.

The Assignment B will be discussed in class on **Monday, October 19, 10-11**. There you give a rough sketch of your solution method. Cooperation with other participants is allowed, even encouraged. However, everybody is to hand in an individual written report. Deadline is **Friday, October 30**.

1.

Stabilitetsanalys av en linjär differensekvation

För vilka värden på a och b är origo en attraktor för systemet

$$f(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x_0 \in \Re^2.$$

Illustrera åtminstone fyra väsentligt olika fall.

Ref.: Devaney, *op. cit.*, Kap. 2.

S. Bjon m. fl., *Numerisk och diskret matematik*, Andra uppl., Sigma vid Åbo Akademi 1989, Kap. 5 (Linjära differensekvationer).

Stability of a Linear Difference Equation

For what values of a and b is the origin an attractor of the system

$$f(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x_0 \in \Re^2.$$

Give examples of at least four qualitatively different cases. Show the orbits graphically.

Ref.: Devaney, *op. cit.*, Chapter 2.

S. Bjon m. fl., *Numerisk och diskret matematik*, Andra uppl., Sigma vid Åbo Akademi 1989, Chapter 5 (Linjära differensekvationer).

2.

Hénonavbildningen

Bestäm så exakt som möjligt den stabila och den instabila mångfalden till en Hénonavbildning $H_{a,b}$ (med $b = -0,3$) i en av dess fixpunkter.

$$H_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

Visa att avbildningen har en attraherande period för vissa värden på a. Visa också att banan det för vissa värden på a blir en Cantorliknande tvådimensionell mängd. Illustrera grafiskt.

The Hénon Map

Determine as accurately as possible the stable and unstable manifolds of an Hénon map (use $b = -0.3$) at one of its fixed points.

$$H_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

Show also that there are values of a for which the map has an attracting period. Show also that for some a we get Cantorlike twodimensional orbits. Illustrate.

Introduktion till dynamiska system Period 1, 2009

Introduction to Dynamical Systems

Hemuppgifter till fredagen den 16 oktober

Exercises for Friday, October 16

1. (Exercise 2, p. 180) Beskriven dynamiken hos de linjära avbildningar vars matrisrepresentation är given nedan. Identifiera de stabila och instabila mängderna.

Describe the dynamics of the linear maps whose matrix representation is given below. Identify precisely the stable and unstable sets.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Betrakta följande differensekvationssystem av *Lotka-Volterra*-typ:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n - bx_ny_n, \\ y_{n+1} &= dy_n + cx_ny_n \end{aligned}$$

för olika värden på parametrarna. Dylika *rovdjur och bytesmodeller* används i ekologi, epidemiologi etc., oftast i kontinuerlig tid. Bytespopulationens storlek (täthet) vid tiden n betecknas x_n och rovdjurspopulationens y_n. Oftast väljs $a > 1$ (exponentiell tillväxt då rovdjur saknas) och $d < 1$ (rovdjuren minskar exponentiellt då mat saknas).

Uppgiften är att studera detta system (med avseende på typen av fixpunkter, eventuella perioder, fasdiagram, asymptotiskt beteende) för olika val av (icke-negativa) koefficienter a, b, c, d. Försök välja ”typiska” fall, inte alltför många. Illustrera grafiskt.

2. Consider the following system of difference equations of *Lotka-Volterra* type

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n - bx_ny_n, \\ y_{n+1} &= dy_n + cx_ny_n \end{aligned}$$

for different values of the parameters. Such *predator-prey models* are widely used in ecology, epidemiology etc., often in continuous time. The prey population density at time n is denoted by x_n while y_n is the density of the predator population. Usually we take $a > 1$ (exponential growth in the absence of predators) and $d < 1$ (the predator population decreases exponentially if there is no prey for food).

Your task is to study this system with regard to types of fixed points, possible periods, phase diagrams, asymptotic behavior etc. for different choices of the non-negative parameters a, b, c, d. Try to choose some “typical” cases, not too many. Illustrate graphically.