BAYESIANSK STATISTIK

DEMONSTRATIONSUPPGIFTER TILL DEN 19.4.2012

1. Låt stokastiska variabler $X_1, X_2, \ldots, X_m$ vara oberoende, X_i är Bin(n_i, θ)-fördelad givet $\Theta = \theta$, $0 \le \theta \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, där m och n_i är positiva heltal. Antag att att vi har motsvarande observationer $x_1, x_2, \ldots, x_m$ och antag vidare att Θ har a-priori-fördelningen Beta(α,β). Bestäm a-posteriori-fördelningen för Θ givet $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_m = x_m$.

2. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vara ett slumpmässigt stickprov från en Exp(θ)-fördelad stokastisk variabel X givet $\Theta = \theta$. Antag att Θ har Gamma(α,β)-a-priori-fördelning. Visa att a-posteriori-fördelningen givet $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_m = x_m$ är Gamma($\alpha+m, \beta+\sum_{i=1}^{m} x_i$)-fördelningen.

3. Antag att X är Geom(θ)-fördelad, där θ är ett utfall av en stokastisk variabel Θ som har a-priori-fördelningen Beta(α,β). Låt $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vara ett slumpmässigt stickprov från X. Bevisa att a-posteriori-fördelningen för Θ givet $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_m = x_m$ är Beta($\alpha+m$, $\beta+\sum_{i=1}^{m} x_i - m$)-fördelningen.

4. Låt den stokastiska variabeln X vara Bin(5, θ)-fördelad där θ är ett utfall av en stokastisk variabel Θ som har diskret a-priori-fördelning på värdena 0.2 och 0.5. Låt $P\{\Theta = 0.2\} = 0.4$ och $P\{\Theta = 0.5\} = 0.6$. Bestäm Bayes skattningen för Θ givet $X = 3$.

5. Låt en stokastisk variabel N vara Poisson(λ)-fördelad givet $\Lambda = \lambda$, Λ har Exp(α)- a-priori-fördelning. Bestäm a-posteriori-fördelningen för $\Lambda | N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m$ och Bayes-skattningen. Framställ Bayes skattningen som ett viktat medelvärde av ML-skattningen för λ och a-priori-väntevärdet av Λ.