

Approximationsteori. Hemuppgifter 8

1. Låt A vara ett ändligtdimensionellt linjärt underrum av ett euklidiskt rum B . Låt $f \in B$ och låt $X(f)$ vara den entydigt bestämda bästa approximationen till f ur A med avseende på $\|\cdot\|_{2,w}$ - normen. Visa att X är en linjär projektion och att $\|X\|_{2,w} = 1$. (Powell övning 11.1)
2. Låt θ_i , för $i = 0, 1, 2$ och 3 , vara de funktioner som erhålls genom att dra rätta linjer mellan funktionsvärdena $\{\theta_i(j) = \delta_{ij}; j = 0, 1, 2, 3\}$. Då är mängden $\{\theta_i, i = 0, 1, 2, 3\}$ en bas för mängden $S(1; 0, 1, 2, 3)$ av linjära rifunktioner med knutpunkterna $0, 1, 2$ och 3 . $f \in L_2[0, 3]$ och ges av $\{f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1, f(x) = 0, 1 < x \leq 3\}$. Utnyttja Sats 9.4.1 för att bestämma koefficienterna $\{c_i^*; i = 0, 1, 2, 3\}$ som minimerar integralen

$$\int_0^3 (f(x) - \sum_{i=0}^3 c_i^* \theta_i(x))^2 dx.$$

Plotta $f(x)$ och $\sum_{i=0}^3 c_i^* \theta_i(x)$, då $0 \leq x \leq 3$. (Powell övning 11.7)

3. $f \in L_2[0, 1]$ ges av $f(x) = 2x - 1$. Bestäm det minsta värdet på n så att

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cos(k\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

uppfyller villkoret

$$\int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx < 10^{-4}.$$

(Powell övning 11.8) (ledning: Parsevals likhet gäller.)

4. Betrakta $f(x) = |x|$ i intervallet $[-1, 1]$. Diskretisera intervallet i 25 ekvidistanta punkter och bestäm det polynom p_n av gradtal n som är den bästa minsta kvadrat approximationen då felet mäts i de diskreta punkterna med vikterna $w_i = 1$ för alla i . Använd Matlabs polyfit kommando eller Mathematicas Fit kommando för att beräkna p_n . Bestäm $\|f - p_n\|_\infty$ på intervallet $[-1, 1]$. Gör detta för $n = 0, 1, 2, \dots, 10$. Illustrera undersökningen grafiskt.