

Approximationsteori. Hemuppgifter 2

1. Antag att K är en konvex mängd och att $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$. Låt $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, och låt $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Visa att $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \in K$.
2. Betrakta $C[0, 1]$ med $f(x) = x^4$ och $P_1 = \{p : p(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$.
 - a) Bestäm $p^* \in P_1$ så att $\|f - p^*\|_2$ minimeras.
 - b) Bestäm $p^* \in P_1$ så att $\|f - p^*\|_\infty$ minimeras.
3. Betrakta $C[-\pi, \pi]$ försett med normen

$$\|f\| = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx + \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x)|.$$

Visa att normen inte är strängt konvex genom att visa att den bästa approximationen till $f(x) = x$ ur mängden $A = \{a(x) = \lambda \sin^2 x, \lambda \in \mathbb{R}\}$ inte är entydigt bestämd. (Powell övning 2.6)

4. Låt A vara en $m \times n$ matris, b en kolonnvektor i $\mathbb{R}^m$. Betrakta lösningarna till ekvationen $Ax = b$, där x är en kolonnvektor i $\mathbb{R}^n$. Visa att lösningsmängden $L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ är konvex.
5. Betrakta $C[0, 1]$ med L_∞ -normen. Låt P_+ beteckna mängden av polynom med samtliga koefficienter ≥ 0 .
 - a) Är P_+ en konvex mängd?
 - b) Är P_+ en begränsad mängd?
 - c) Är P_+ en sluten mängd?