

Komplex analys I, hemuppgifter till vecka 42

1. Bestäm den Möbiustransformation som roterar varje punkt i z -planet en vinkel θ runt punkten z_0 .
2. Bestäm en Möbiustransformation som avbildar halvplanet $\operatorname{Re} z > a$, där $a \in \mathbf{R}$, på området $|w| < 1$ i w -planet.
3. Bestäm alla Möbiustransformationer som avbildar reella axeln i z -planet på reella axeln i w -planet och har fixpunkterna $z = 1$ och $z = 2$.
4. På vilket område i w -planet avbildas området $0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$ av funktionen $w = \frac{e^{2z}-i}{e^{2z}+i}$?
5. Bestäm den Möbiustransformation som har en fixpunkt i $z = 1$ och som avbildar området $D_z = \{z : |z| < 1 \text{ och } |z - \frac{1}{4}| > \frac{1}{4}\}$ på en origocentrerad cirkelring med yttre begränsning $|w| = 1$. Bestäm den inre cirkelns radie. (Ledning: Börja med att bestämma två punkter som är spegelpunkter för både $|z| = 1$ och $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$).
6. Sök en funktion $w = f(z)$ som avbildar området $D = \{z : |z| < 1 \text{ och } \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1\}$ på området $\operatorname{Im} w > 0$.
7. **Extra uppgift, kan bytas mot någon av 1 - 6.** Visa att

$$w = S(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1},$$

där $|\alpha| < 1$ och $0 \leq \theta < 2\pi$, avbildar området $|z| < 1$ i z -planet på området $|w| < 1$ i w -planet.