

Komplex analys I, hemuppgifter till vecka 37

1. Verifiera att associationslagen, $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$, gäller för alla komplexa tal $z_j = (x_j, y_j)$, $j = 1, 2, 3$.
2. En ordningsrelation $>$ kan införas i $\mathbb{R}$ på grund av att det existerar en delmängd P av de reella talen sådan att
 - (i) För varje $\alpha \neq 0$ gäller att antingen α eller $-\alpha$ tillhör mängden P ,
 - (ii) α och β tillhör $P \Rightarrow \alpha + \beta$ tillhör P ,
 - (iii) α och β tillhör $P \Rightarrow \alpha \cdot \beta$ tillhör P .Vi definierar då $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta$ tillhör P . Visa att de komplexa talen inte har någon delmängd P som uppfyller (i), (ii) och (iii). (Ledning: Ställ upp antites att det existerar en dylik mängd i $\mathbb{C}$. Visa att $-1 \notin P$, visa sedan att varken i eller $-i$ kan tillhöra P .)
3. Bevisa att för godtyckliga komplexa tal z_1 och $z_2 \neq 0$ gäller att

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \text{och} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

4. Visa att för alla komplexa tal gäller olikheten $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2|$.
5. Beskriv geometriskt följande mängder:

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| > 1\},$$
$$S_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0\}.$$

6. Visa att för komplexa tal z_1 och z_2 gäller att: $z_1 \cdot z_2 = 0$ om och endast om $z_1 = 0$ eller $z_2 = 0$.
7. Förenkla talet

$$\frac{(i-1)^4}{(1+i\sqrt{3})^3}.$$

8. a) Bestäm alla rötter till ekvationen $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$.
(Ledning: Multiplicera båda leden i ekvationen med faktorn $(1-z)$).
b) Beräkna $i^{1/2}$.