Komplex analys I. Kurstentamen 21.10.2019

1. Definiera följande begrepp:
   a) ett område i komplexa talplanet,
   b) en analytisk funktion,
   c) ett n-faldigt nollställe, $z = a \neq \infty$, för en analytisk funktion,
   d) en regulär kurva,
   e) en konform avbildning,
   f) en Möbiustransformation.

2. Låt a, b och z vara komplexa tal, sådana att $|a| \neq |b|$. Visa att om $|z| = 1$, så gäller:
$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = 1\,.$$

3. För vilka värden på de reella konstanterna a och b utgör den reellvärda funktionen $u(x,y) = 3x^2 + ax + by^2 - 1$ den reella delen av en analytisk funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$? Bestäm f som funktion av z.

4. Lös i komplexa talplanet ekvationen
$$\tan z = \frac{1-i}{2}\,.$$

5. Bestäm en funktion $w = f(z)$ som avbildar området $D = \{z : |z| < 1 \text{ och } |z - (1+i)| < 1\}$ konformt på det övre halvplanet $U = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

Komplex analys I, kurstentamen 21.10.2019

1] Se föreläsningarna.

2] $a, b, z \in \mathbb{C}$, $|a| \neq |b|$. Visa att om $|z| = 1$ så gäller $\left|\dfrac{az+b}{\bar b z + \bar a}\right| = 1$.

alt 1: $|z| = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff z \cdot \bar z = 1 \iff z = \dfrac{1}{\bar z}$.

$$\underline{\underline{\left|\frac{az+b}{\bar b z + \bar a}\right|}} = \left|\frac{az+b}{\bar b/\bar z + \bar a}\right| = |z| \cdot \left|\frac{a + \frac{b}{z}}{\bar a + \bar b/\bar z}\right| = 1 \cdot \left|\frac{a+\frac{b}{z}}{\overline{(a+\frac{b}{z})}}\right|$$

$$= \frac{\left|a + \frac{b}{z}\right|}{\left|\overline{(a+\frac{b}{z})}\right|} \underline{\underline{= 1}}, \quad (\text{ty } |z| = |\bar z| \text{ för alla } z \in \mathbb{C}).$$

alt 2: $S(z) = \dfrac{az+b}{\bar b z + \bar a}$, $a\bar a \neq b \bar b$ (ty $|a| \neq |b|$),
Möbiustransformation.

$$\begin{cases} |S(1)| = \left|\dfrac{a+b}{\bar b + \bar a}\right| = \dfrac{|a+b|}{\left|\overline{(a+b)}\right|} = 1, \\[2ex] |S(-1)| = \left|\dfrac{-a+b}{-\bar b + \bar a}\right| = \left|\dfrac{b-a}{(-1)\cdot(\bar b - \bar a)}\right| = \left|\dfrac{b-a}{\overline{(b-a)}}\right| = 1, \\[2ex] |S(i)| = \left|\dfrac{ia+b}{\bar b i + \bar a}\right| = \left|\dfrac{ia+b}{i(\bar b + \frac{\bar a}{i})}\right| = \left|\dfrac{ia+b}{(-i)\cdot\bar a + \bar b}\right| = \dfrac{|ia+b|}{\left|\overline{(ia+b)}\right|} = 1. \end{cases}$$

$\therefore$ $w = S(z)$ avbildar tre olika punkter på $|z| = 1$ på tre olika punkter på $|w| = 1$.

$\therefore$ $w = S(z)$ avbildar $|z| = 1$ på $|w| = 1$.

$\therefore$ $\left|\dfrac{az+b}{\bar b z + \bar a}\right| = 1$ för $|z| = 1$.

3) För vilka värden på de reella konstanterna a och b utgör $u(x,y) = 3x^2 + ax + by^2 - 1$ den reella delen av en analytisk funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x+iy$? Bestäm f som funktion av z.

1°) $u(x,y)$ bör vara harmonisk:

$$\begin{cases} u'_x = 6x + a, & u''_{xx} = 6 \\ u'_y = 2by, & u''_{yy} = 2b \end{cases}$$

Krav: $u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \iff 2b + 6 = 0 \iff \begin{cases} b = -3 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\therefore\ u(x,y) = 3x^2 + ax - 3y^2 - 1.$

2°) $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, u,v bör uppfylla Cauchy-Riemanns diff. ekvationer

α) $\dfrac{\partial v}{\partial y} \overset{\text{krav}}{=} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 6x + a \implies v(x,y) = 6xy + ay + \varphi(x)$,
φ deriverbar funktion av x.

β) $6y + \varphi'(x) = \dfrac{\partial v}{\partial x} \overset{\text{krav}}{=} -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 6y$

$\therefore\ \varphi'(x) = 0 \implies \varphi(x) = k \in \mathbb{R}$ (konstant)

3°) $f(\underbrace{x+iy}_{=z}) = 3x^2 + ax - 3y^2 - 1 + i\,(6xy + ay + k)$

$= 3(\underbrace{x^2 - y^2 + i\,2xy}_{=z^2}) + a(\underbrace{x+iy}_{=z}) + ik - 1$

$\therefore\ f(z) = 3z^2 + az + i\cdot k - 1,\quad a, k \in \mathbb{R}.$

4] Lös i komplexa talplanet ekvationen

$$\tan z = \frac{1-i}{2}.$$

Lösning:

$$\tan z = \frac{1}{2}(1-i) \iff \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = \frac{1}{2}(1-i)$$

$$\iff e^{2iz}-1 = \frac{1}{2}e^{2iz}+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}e^{2iz}+\frac{i}{2}$$

$$\iff \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)e^{2iz} = \frac{3}{2}+\frac{i}{2}$$

$$\iff e^{2iz} = \frac{3+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1}{2}(2+4i) = 1+2i$$

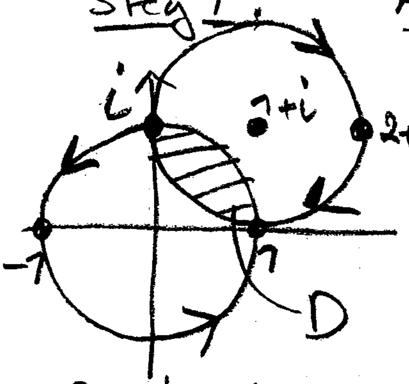
$$\iff 2iz = \ln(1+2i) = \ln|1+2i| + i(\arg(1+2i)+n\cdot 2\pi)$$

$$= \ln\sqrt{5} + i\left(\arctan\left(\frac{2}{1}\right)+n\cdot 2\pi\right),\ n\in\mathbb{Z}\ \Big|/2i$$

$$\iff z = \frac{1}{2}\arctan 2 + n\pi - \frac{i}{4}\cdot\ln 5,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

5] Bestäm en funktion $w=f(z)$ som avbildar området $D=\{z:|z|<1$ och $|z-(1+i)|<1\}$ konformt på det övre halvplanet $U=\{w: \operatorname{Im} w>0\}$.

Steg 1: Avbildar i på ∞ med $w_1 = \frac{1}{z-i}$, vi får

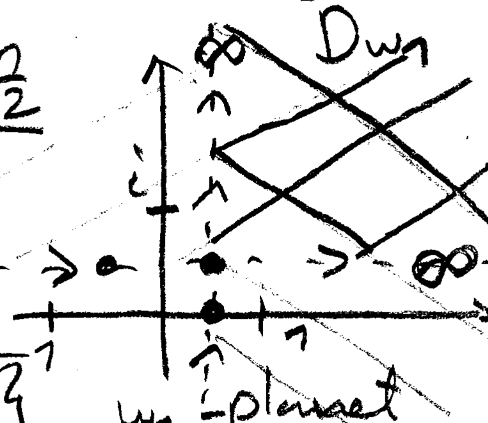


z-plan

$$\begin{cases} -1 \longrightarrow \frac{1}{-1-i}\cdot\frac{-1+i}{-1+i} = \frac{1}{2}(-1+i) \\ 1 \longrightarrow \frac{1}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1}{2}(1+i) \\ i \longrightarrow \infty \\ 2+i \longrightarrow \frac{1}{2+i-i} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} |z|<1 \text{ avbildas på: } \operatorname{Im} w_1 > \frac{1}{2} \\ |z-(i+1)|<1 \quad -\text{"}- \quad : \operatorname{Re} w_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore D \longrightarrow D_{w_1} = \{w_1 : \operatorname{Re} w_1 > \tfrac{1}{2} \text{ och } \operatorname{Im} w_1 > \tfrac{1}{2}\}$$

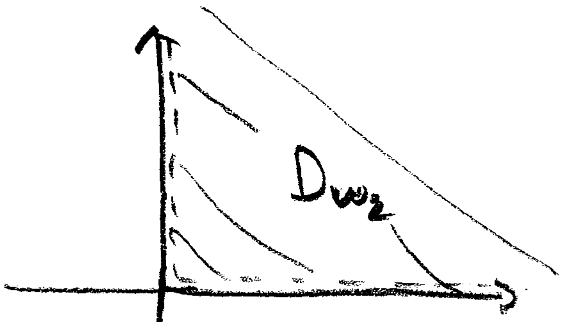


w_1-planet

5] (forts).

Steg 2: $\underline{\underline{w_2}} = w_1 - \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{2}(1+i)\cdot\frac{z-1}{z-i}$

avbilder D_{w_1} på $D_{w_2} = \{w_2 : \operatorname{Re} w_2 > 0 \text{ och } \operatorname{Im} w_2 > 0\}$

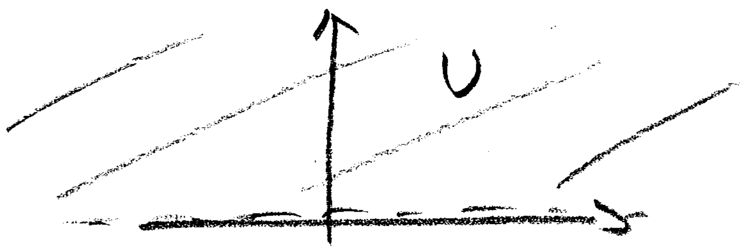


w_2-planet

Steg 3: $\underline{\underline{w}} = w_2^2 = \left(-\frac{1}{2}(1+i)\cdot\frac{z-1}{z-i}\right)^2$

$$= \frac{i}{2}\cdot\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^2 = f(z)$$

avbilder D_{w_2} på $U = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.



w-planet

Svar: $w = \frac{i}{2}\cdot\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^2 = f(z)$ ger den konforma avbildningen av D på U.