

Komplex analys I, v.41

Anmärkning: En "cirkel" i z -planet som genömlöper polen $z = -d/c$ avbildas på en linje i w -planet. En "cirkel" som inte går igenom polen i z -planet avbildas på en cirkel i w -planet.

Det gäller att $(S^{-1} \circ S)(z) := S^{-1}(S(z)) = z$ för alla $z \in \mathbb{C}$, alltså är $(S^{-1} \circ S)$ en Möbiustransformation. Mera allmänt gäller:

Sats 4.4. Om $S(z)$ och $T(z)$ är Möbiustransformationer, så är även $(T \circ S)(z) := T(S(z))$ en Möbiustransformation.

Bevis: Övningsuppgift. $\square$

Möbiustransformationer

Definition 4.3. En punkt $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ är en fixpunkt för f om $f(z_0) = z_0$.

Sats 4.5. Om en Möbiustransformation $S(z)$ har mer än två fixpunkter i $\overline{\mathbb{C}}$, så gäller $S(z) = z$ för alla $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

Bevis: 1. $c = 0$. Då är $S(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Vi ser att $S(\infty) = \infty$, alltså är $z = \infty$ en fixpunkt. För att hitta övriga fixpunkter löser vi följande ekvation i $\mathbb{C}$,

$$S(z) = z \Leftrightarrow \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d} - 1\right)z + \frac{b}{d} = 0. \quad (4.18)$$

För att (4.18) skall ha mer än en lösning bör $\frac{a}{d} - 1 = 0$ och $\frac{b}{d} = 0$ gälla, vilket medför att $b = 0$ och $a = d$. Alltså $S(z) = z$ för alla $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

2. $c \neq 0$. Nu är $S(z) = (az + b)/(cz + d)$, så det gäller att $S(\infty) = a/c \neq \infty$. Alltså är $z = \infty$ ingen fixpunkt. Eventuella fixpunkter i $\mathbb{C}$ erhålls ur ekvationen

$$S(z) = z \Leftrightarrow az + b = z(cz + d) \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (4.19)$$

Eftersom $c \neq 0$ har ekvationen (4.19) högst två olika lösningar. Alltså har $S(z)$ högst två fixpunkter då $c \neq 0$. Satsens påstående följer nu ur punkt 1. och 2. $\square$

Fyra punkters dubbelförhållande

Definition 4.4. Om a, b, c, d är fyra olika komplexa tal i $\overline{\mathbb{C}}$, så definieras betydelsen av beteckningen (a, b, c, d) genom:

$$\underline{(a, b, c, d) := \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)},} \quad (4.20)$$

och kallas talens dubbelförhållande. Speciellt om något av talen är ∞ så definieras

$$\begin{aligned} (\infty, b, c, d) &= \frac{(c-d)}{(c-b)}, \\ (a, \infty, c, d) &= \frac{(c-d)}{(a-d)}, \\ (a, b, \infty, d) &= \frac{(a-b)}{(a-d)}, \\ (a, b, c, \infty) &= \frac{(a-b)}{(c-b)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

dvs. vid beräkning med dubbelförhållanden har vi som konvention att tolka $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

Fyra punkters dubbelförhållande

Anmärkning: Ordningsföljden av punkterna i (a, b, c, d) är viktig!

Tag tre godtyckligt valda olika punkter z_1, z_2, z_3 i det utvidgade z -planet och tre godtyckligt valda olika punkter w_1, w_2, w_3 i det utvidgade w -planet. Vi skall nu visa att: Om det existerar en Möbiustransformation $S(z)$ sådan att $S(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$, så är den entydigt bestämd. Antag då att S och T är Möbiustransformationer och att $S(z_i) = T(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$. Då gäller $T^{-1}(w_i) = z_i$, $i = 1, 2, 3$. Sammansättningen $(T^{-1} \circ S)(z)$ är enligt Sats 4.4 en Möbiustransformation. Vidare gäller att $(T^{-1} \circ S)(z_i) = T^{-1}(S(z_i)) = z_i$, $i = 1, 2, 3$. Alltså har $(T^{-1} \circ S)(z)$ minst tre fixpunkter i $\mathbb{C}$. Med stöd av Sats 4.5 gäller det att $(T^{-1} \circ S)(z) = T^{-1}(S(z)) = z$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Detta medför att $T^{-1}(w) = S^{-1}(w)$ för alla $w \in \mathbb{C}$, vilket i sin tur medför att $T(z) = S(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Alltså finns det högst en Möbiustransformation som avbildar z_1, z_2, z_3 på respektive w_1, w_2, w_3 .

Fyra punkters dubbelförhållande

Nu skall vi visa att det alltid går att konstruera en Möbiustransformation $M(z)$ som avbildar z_1, z_2, z_3 på w_1, w_2, w_3 . Vi avbildar först z_1 på 0, z_2 på 1

och z_3 på ∞ . Detta kan göras genom att för fixa z_1, z_2, z_3 i $\overline{\mathbb{C}}$ definiera

$$\begin{aligned} S(z) &:= \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = (z, z_1, z_2, z_3), \quad \text{om } z_1, z_2, z_3 \neq \infty, \\ S(z) &:= \frac{(z_2 - z_3)}{(z - z_3)} = (z, \infty, z_2, z_3), \quad \text{om } z_1 = \infty, \\ S(z) &:= \frac{(z - z_1)}{(z - z_3)} = (z, z_1, \infty, z_3), \quad \text{om } z_2 = \infty, \\ S(z) &:= \frac{(z - z_1)}{(z_2 - z_1)} = (z, z_1, z_2, \infty), \quad \text{om } z_3 = \infty. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Alltså $S(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ i alla fall. Om vi väljer tre andra olika punk-

Fyra punkters dubbelförhållande

Alltså $S(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ i alla fall. Om vi väljer tre andra olika punkter w_1, w_2, w_3 så avbildas dessa av $T(w) = (w, w_1, w_2, w_3)$ på $0, 1, \infty$. Då gäller: $T^{-1}(0) = w_1$, $T^{-1}(1) = w_2$ och $T^{-1}(\infty) = w_3$. Vår eftersökta Möbiustransformation $M(z)$ ges då av

$$w = M(z) = T^{-1}(S(z)), \quad (4.23)$$

ty $M(z_1) = T^{-1}(S(z_1)) = T^{-1}(0) = w_1$, $M(z_2) = T^{-1}(S(z_2)) = T^{-1}(1) = w_2$ och $M(z_3) = T^{-1}(S(z_3)) = T^{-1}(\infty) = w_3$. Ekvationen (4.23) ger att $T(w) = T(T^{-1}(S(z))) = S(z)$, vilket kan skrivas i formen

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3). \quad (4.24)$$

$M(z)$ kan alltså bestämmas ur ekvationen (4.24) genom att lösa ut variabeln w . Vi sammanfattar:

Sats 4.6. Om z_1, z_2, z_3 är tre olika godtyckligt valda punkter i $\overline{\mathbb{C}}$, och w_1, w_2, w_3 är tre godtyckligt valda olika punkter i $\overline{\mathbb{C}}$, så finns det en entydigt bestämd Möbiustransformation $w = M(z)$ som avbildar z_1 på w_1 , z_2 på w_2 och z_3 på w_3 . $w = M(z)$ kan beräknas ur ekvation (4.24).

Fyra punkters dubbelförhållande

Exempel 4.2. Bestäm den Möbiustransformation som avbildar punkten 0 på i , punkten 1 på 2 och punkten -1 på 4.

Lösning: Vi beräknar

$$\begin{aligned}(z, 0, 1, -1) &= \frac{(z-0)(1-(-1))}{(z-(-1))(1-0)} = \frac{2z}{z+1}, \\(w, i, 2, 4) &= \frac{(w-i)(2-4)}{(w-4)(2-i)} = \frac{-2(w-i)}{(w-4)(2-i)}.\end{aligned}$$

Den efterfrågade Möbiustransformationen $w = S(z)$ ges då med stöd av (4.24) av

$$\begin{aligned}(z, 0, 1, -1) = (w, i, 2, 4) &\Leftrightarrow \frac{-2(w-i)}{(w-4)(2-i)} = \frac{2z}{z+1} \\&\Leftrightarrow w = \frac{(16-6i)z+2i}{(6-2i)z+2} =: S(z),\end{aligned}$$

vilket löser uppgiften.

Fyra punkters dubbelförhållande

Om $w = S(z)$ ges av (4.24), och vi väljer en fjärde punkt z_4 sådan att $w_4 = S(z_4)$, så gäller

$$(z_4, z_1, z_2, z_3) = (w_4, w_1, w_2, w_3). \quad (4.25)$$

Alltså har vi att:

Sats 4.7. *Fyra punkters dubbelförhållande är invariant (oförändrat) vid en Möbiustransformation.*

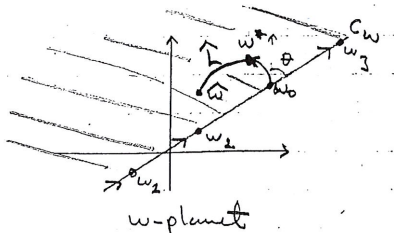
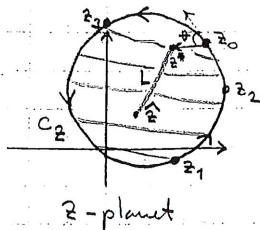
Vi övergår i nästa avsnitt till att behandla avbildningen av områden till vänster om en orienterad "cirkel" i z -planet på områden till vänster om en orienterad "cirkel" i w -planet.

Avbildning av "cirkelområden"

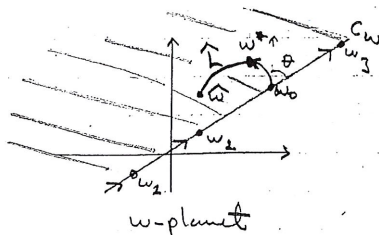
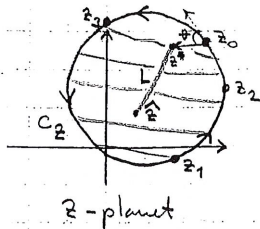
Om C_z är en "cirkel" i z -planet som är orienterad med hjälp av punkterna z_1, z_2 och z_3 , så delas z -planet upp i unionen av C_z och två "cirkelområden", det vänstra området och det högra området med avseende på C_z :s orientering. Antag att C_w är en "cirkel" i w -planet som är orienterad med hjälp av punkterna w_1, w_2 och w_3 . Då gäller det att vid den Möbiustransformation $w = S(z)$, som avbildar z_1, z_2 och z_3 på respektive w_1, w_2 och w_3 , avbildas det vänstra området i z -planet på det vänstra området i w -planet.

Avbildning av "cirkelområden"

Motivering: Tag en punkt $z_0 \in C_z$ sådan att z_0 inte är en pol för $S(z)$. Då gäller $S'(z_0) \neq 0$. Punkten z_0 avbildas konformt på punkten $w_0 = S(z_0)$ på C_w . Då kan vi välja en punkt z^* i det vänstra området i z -planet "nära" punkten z_0 , så att sträckan börjande i z_0 och slutande i z^* avbildas på en sträcka eller en cirkelbåge börjande i w_0 och slutande i w^* i det vänstra området i w -planet.



Avbildning av "cirkelområden"

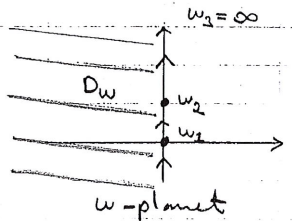
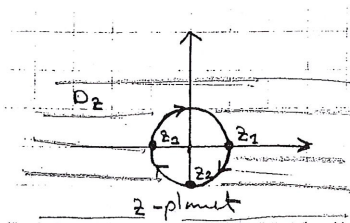


Om vi tar en annan godtycklig punkt $\hat{z} \neq z^*$ i det vänstra området i z -planet, så kan vi förbinda z^* och $\hat{z}$ med en sträcka eller en cirkelbåge L som inte innehåller en pol för $S(z)$. ($\hat{z}$ kan tillåtas vara en pol). Bilden av $\hat{z}$ må vara $\hat{w} = S(\hat{z})$, ($\hat{w} = \infty$ om $\hat{z}$ är pol), och bilden av L är $\hat{L}$. Då är $\hat{L}$ en sträcka, en cirkelbåge eller en stråle i w -planet. $\hat{L}$ ligger helt i det vänstra området i w -planet, ty om $\hat{L}$ skulle ha en skärningspunkt med C_w så skulle det finnas en punkt på L som skulle avbildas på C_w , men detta är omöjligt då $L \cap C_z = \emptyset$. Därmed avbildas $\hat{z}$ på en punkt i det vänstra området i w -planet. Då $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ är bijektiv måste det vänstra (högra) området i z -planet avbildas på det vänstra (högra) området i w -planet.

Avbildning av "cirkelområden"

Exempel 4.3. Bestäm en Möbiustransformation $w = S(z)$ som avbildar området $D_z : |z| > 1$ på området $D_w : \operatorname{Re} w < 0$.

Lösning: Vi har att $C_z : |z| = 1$ och $C_w : \operatorname{Re} w = 0$. Tolka D_z som ett vänstra område, välj t.ex. $z_1 = 1$, $z_2 = -i$ och $z_3 = -1$. Tolka D_w som ett vänstra område, välj exempelvis $w_1 = 0$, $w_2 = i$ och $w_3 = \infty$.



Avbildning av "cirkelområden"

Nu ges $w = S(z)$ av ekvationen $(w, 0, i, \infty) = (z, 1, -i, -1)$ (enligt (4.24)).
Alltså erhålls:

$$\begin{aligned}\frac{w-0}{i-0} &= \frac{(z-1)(-i-(-1))}{(z-(-1))(-i-1)} \\ &\Leftrightarrow \\ \underline{w} &= \underline{\frac{(z-1)(1+i)}{(z+1)(-1-i)} = \frac{1-z}{1+z} = S(z)}.\end{aligned}$$

Avbildning av "cirkelområden"

Exempel 4.4. Sök en avbildning $w = f(z)$ som avbildar området $D_z = \{z : |z| < 2 \text{ och } |z - 1| > 1\}$ på området $D_w : \operatorname{Im} w > 0$. (Rita figur!).

Lösning: Steg 1. Vi "sänder iväg" $z = 2$ till $w_1 = \infty$ med avbildningen $w_1 = S_1(z) = \frac{1}{z-2}$. Då har vi att $S_1(-2) = -\frac{1}{4}$, $S_1(-2i) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ och $S_1(2) = \infty$. Alltså har vi att $|z| < 2$ avbildas på $\operatorname{Re} w_1 < -\frac{1}{4}$. Vidare gäller att $S_1(0) = -\frac{1}{2}$, $S_1(1+i) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ och $S_1(2) = \infty$. Därmed avbildas $|z - 1| > 1$ på $\operatorname{Re} w_1 > -\frac{1}{2}$. Sammanfattningsvis har vi då att D_z avbildas på parallellstrimlan $D_{w_1} : -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} w_1 < -\frac{1}{4}$ av $w_1 = S_1(z)$.

Steg 2. Avbildningen $w_2 = w_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2}$ avbildar D_{w_1} på $D_{w_2} : 0 < \operatorname{Re} w_2 < \frac{1}{4}$.

Steg 3. Avbildningen $w_3 = 4\pi e^{i\frac{\pi}{2}} w_2 = 4\pi i(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{2})$ avbildar D_{w_2} på $D_{w_3} : 0 < \operatorname{Im} w_3 < \pi$.

Steg 4. Avbildningen $w = e^{w_3}$ avbildar D_{w_3} på $D_w : \operatorname{Im} w > 0$.

Den sökta avbildningen $w = f(z)$ ges därmed av

$$\underline{w = e^{w_3} = e^{4\pi i(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{2})} = e^{\frac{2\pi i z}{z-2}} = f(z)}.$$

Definition 4.5. Punkterna z_0 och z_0^* är *spegelpunkter* med avseende på “cirkeln” $C_z \in C(z)$, som genomlöper punkterna z_1, z_2 och z_3 , om och endast om

$$(z_0^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z_0, z_1, z_2, z_3)}. \quad (4.26)$$

Vi skall undersöka den geometriska innebörden av spegelpunkter. När är $z_0^* = z_0$? Vi har att $(z_0, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z_0, z_1, z_2, z_3)}$ om och endast om (z_0, z_1, z_2, z_3) är reellt. Vidare kan man visa att (z_0, z_1, z_2, z_3) är reellt då och endast då z_0, z_1, z_2, z_3 är punkter på samma “cirkel”, (övningsuppgift). Alltså är $z_0 = z_0^* \Leftrightarrow z_0$ är en punkt på “cirkeln” C_z .

Spiegelpunkter

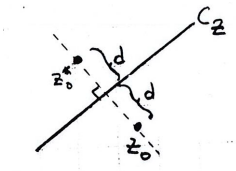
Antag nu att $z_0 \notin C_z$ och att C_z är en linje på vilken z_1, z_2, z_3 är tre olika punkter. Då gäller för något $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ att $z_3 = tz_1 + (1-t)z_2$, (där $t = \infty$ om $z_3 = \infty$). Då kan (4.26) skrivas i formen:

$$\frac{z_0^* - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - (tz_1 + (1-t)z_2)}{z_0^* - (tz_1 + (1-t)z_2)} = \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \cdot \frac{\bar{z}_2 - (t\bar{z}_1 + (1-t)\bar{z}_2)}{\bar{z}_0 - (t\bar{z}_1 + (1-t)\bar{z}_2)} \quad (4.27)$$

ur vilken vi erhåller

$$z_0^* = \frac{(z_2 - z_1)(\bar{z}_0 - \bar{z}_1)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} + z_1. \quad (4.28)$$

Därmed gäller $|z_0^* - z_1| = |z_0 - z_1|$ för alla $z_1 \in C_z$. Då måste z_0 och z_0^* ligga i olika halvplan definierade av C_z och linjen L genom z_0 och z_0^* måste skära C_z vinkelrätt. Alltså bestämmer z_0 entydigt z_0^* genom (4.28), oberoende av valet av z_1, z_2 och z_3 .



Spiegelpunkter

Antag nu att C_z är en cirkel med radien R och medelpunkten a . Antag vidare att $z_0 \notin C_z$ och att $z_0 \neq a$. Genom att utnyttja $R^2 = |z_i - a|^2 = (z_i - a)(\bar{z}_i - \bar{a})$, $i = 1, 2, 3$, och invariansen av fyra punkters dubbelförhållande vid en Möbiustransformation, som i detta fall är en translation med $-a$, erhålls:

$$\begin{aligned}\overline{(z_0, z_1, z_2, z_3)} &= \overline{(z_0 - a, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a)} \\ &= \left(\bar{z}_0 - \bar{a}, \frac{R^2}{z_1 - a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a} \right).\end{aligned}\quad (4.29)$$

Genom att i (4.29) tillämpa Möbiustransformationen $w = R^2 \cdot \frac{1}{z}$ och därefter translatera med $+a$ får vi:

$$\begin{aligned}\overline{(z_0, z_1, z_2, z_3)} &= \left(\frac{R^2}{\bar{z}_0 - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a \right) \\ &= \left(\frac{R^2}{\bar{z}_0 - \bar{a}} + a, z_1, z_2, z_3 \right).\end{aligned}\quad (4.30)$$

Vi erhåller därmed formeln

$$z_0^* = \frac{R^2}{\bar{z}_0 - \bar{a}} + a, \quad (4.31)$$

för konstruktion av spegelpunkten z_0^* till punkten z_0 . Vidare ger (4.31) att

Spiegelpunkter

Vi erhåller därmed formeln

$$z_0^* = \frac{R^2}{\bar{z}_0 - \bar{a}} + a, \quad (4.31)$$

för konstruktion av spegelpunkten z_0^* till punkten z_0 . Vidare ger (4.31) att

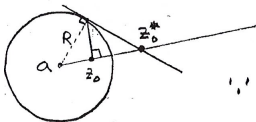
$$|z_0 - a| |z_0^* - a| = R^2, \quad (4.32)$$

$$\frac{z_0^* - a}{z_0 - a} = \frac{R^2}{|z_0 - a|^2}. \quad (4.33)$$

Ur (4.33) erhålls $\arg(z_0^* - a) = \arg(z_0 - a) + 2\pi n$, vilket innebär att z_0 och z_0^* ligger på en stråle som utgår från medelpunkten a . Vidare är en av punkterna belägen innanför C_z och den andra utanför C_z , för att (4.32) skall gälla. På grund av att (4.32) medför att

$$\frac{R}{|z_0 - a|} = \frac{|z_0^* - a|}{R}$$

kan z_0 och z_0^* konstrueras geometriskt på nedanstående sätt.



$$\therefore \frac{R}{|z_0 - a|} = \frac{|z_0^* - a|}{R} \Leftrightarrow |z_0 - a| |z_0^* - a| = R^2,$$

Spiegelpunkter

Vid en Möbiustransformation avbildas spegelpunkter på spegelpunkter.
Mera exakt uttryckt har vi resultatet:

Sats 4.8. Låt z_0 och z_0^* vara spegelpunkter för "cirkeln" C_z i z -planet. Antag att C_z avbildas på en "cirkel" C_w i w -planet av Möbiustransformationen $w = M(z)$. Då är $w_0 = M(z_0)$ och $w_0^* = M(z_0^*)$ spegelpunkter för "cirkeln" C_w .

Spiegelpunkter

Bevis: Antag att $w = M(z)$ avbildar z_1, z_2 och z_3 på C_z på respektive w_1, w_2 och w_3 på C_w . Ifall C_z är en cirkel med radie R och medelpunkt a väljer vi $z_1 = a - R$, $z_2 = a + iR$ och $z_3 = a + R$. Ifall C_z är en linje väljs $z_3 = \infty$. Vi antar nu att z_0 avbildas på $w_0 = M(z_0)$ och att w_0^* är spegelpunkt till w_0 . Vi skall visa att $w_0^* = M(z_0^*)$. Vi visar först att om C_z avbildas på reella axeln, så avbildas z_0 och z_0^* på spegelpunkter för reella axeln. Låt avbildningen $S(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ avbildar C_z på reella axeln så att z_1, z_2, z_3 avbildas på $0, 1$ och ∞ .

1. C_z är en linje och $z_3 = \infty$. Nu är $S(z) = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ och $S(z_0) = \frac{z_0-z_1}{z_2-z_1}$. Då fås med stöd av (4.28) att

$$S(z_0^*) = \frac{\frac{(z_2-z_1)(\bar{z}_0-\bar{z}_1)}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} + z_1 - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left(\frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1} \right)} = \overline{S(z_0)}.$$

Alltså är $S(z_0)$ och $S(z_0^*)$ spegelpunkter med avseende på reella axeln.

Spiegelpunkter

2. C_z är en cirkel och $z_1 = a - R$, $z_2 = a + iR$ och $z_3 = a + R$. Nu är $S(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$. För $z_0 \neq a$ gäller det med stöd av (4.31) att

$$S(z_0) = \frac{(z_0 - (a - R))(iR - R)}{(z_0 - (a + R))(iR + R)} = i \frac{z_0 - (a - R)}{z_0 - (a + R)},$$

$$(4.31) \quad z_0^* = \frac{R^2}{\bar{z}_0 - \bar{a}} + a$$

$$S(z_0^*) = \frac{\left(\frac{R^2}{\bar{z}_0 - \bar{a}} + R\right)(iR - R)}{\left(\frac{R^2}{\bar{z}_0 - \bar{a}} - R\right)(iR + R)} = i \frac{R^2 + R(\bar{z}_0 - \bar{a})}{R^2 - R(\bar{z}_0 - \bar{a})} = -i \frac{\bar{z}_0 - \bar{a} + R}{\bar{z}_0 - \bar{a} - R}$$

$$= -i \left(\frac{z_0 - (a - R)}{z_0 - (a + R)} \right) = \overline{S(z_0)}.$$

För $z_0 = a$ är $S(a) = -i$ och $S(\infty) = i$. Därmed är $S(z_0)$ och $S(z_0^*)$ spegelpunkter med avseende på reella axeln.

Låt nu $T(w)$ avbilda w_1, w_2 och w_3 på 0, 1 och ∞ . Då gäller $w = M(z) = T^{-1}(S(z))$. Vidare fås:

$$w_0 = M(z_0) = T^{-1}(S(z_0)) \Rightarrow T(w_0) = S(z_0),$$

och

$$T(w_0^*) = (w_0^*, w_1, w_2, w_3) = \overline{(w_0, w_1, w_2, w_3)} = \overline{T(w_0)} = \overline{S(z_0)} = S(z_0^*).$$

Alltså gäller $w_0^* = T^{-1}(S(z_0^*)) = M(z_0^*)$ och satsen är bevisad. $\square$

Anmärkning: Med hjälp av Sats 4.8 konstrueras en Möbiustransformation som avbildar C_z på C_w genom att kräva att $z_0 \notin C_z$ avbildas på $w_0 \notin C_w$ och $z_1 \in C_z$ avbildas på $w_1 \in C_w$. Transformationen erhålls ur $(w, w_0, w_0^*, w_1) = (z, z_0, z_0^*, z_1)$.

Spiegelpunkter

Exempel 4.5. Bestäm alla Möbiustransformationer som avbildar $|z| < 1$ på $|w| < 1$.

Lösning: Låt $w = S(z)$ vara en sådan avbildning. Då avbildas $C_z : |z| = 1$ på $C_w : |w| = 1$ av denna avbildning. Låt α vara en punkt sådan att $w_0 = S(\alpha) = 0$. Spiegelpunkten α^* erhålls ur (4.31) : $\alpha^* = \frac{1}{\bar{\alpha}-0} + 0 = \frac{1}{\bar{\alpha}}$. Då måste $w_0^* = S(\alpha^*) = S(1/\bar{\alpha})$ vara spiegelpunkt till $w_0 = 0$. Men eftersom medelpunkten för C_w är w_0 måste $w_0^* = \infty$, dvs. $S(1/\bar{\alpha}) = \infty$. Därmed har S ett nollställe i $z = \alpha$ och en pol i $z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$, och måste därmed vara av formen

$$S(z) = k \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} = k \bar{\alpha} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}, \quad \text{där } k \in \mathbb{C}.$$

Eftersom $S(1) \in C_w$ gäller det att $1 = |S(1)| = |k \bar{\alpha}| \left| \frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1} \right| = |k \bar{\alpha}|$. Då gäller $k \bar{\alpha} = e^{i\theta}$ för något θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, och vi har att

$$S(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}, \quad (|\alpha| < 1). \quad (4.34)$$

Man bör nu även visa att varje Möbiustransformation av formen (4.34) avbildar $|z| < 1$ på $|w| < 1$, detta lämnas som övningsuppgift. Svaret på vår uppgift ges då av alla Möbiustransformationer av formen (4.34), där $0 \leq \theta < 2\pi$ och $|\alpha| < 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Ändliga Blaschke-produkter

En **ändlig Blaschke-produkt** av gradtal n är en rationell funktion av formen:

$$w = B_n(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_j} z},$$

där $|\alpha_j| < 1$ och $0 \leq \theta < 2\pi$.

Blaschke-produkten B_n förmedlar en $n \leftrightarrow 1$ avbildning av $|z| < 1$ på $|w| < 1$. Enhetscirkeln $|z| = 1$ avbildas på enhetscirkeln $|w| = 1$.

Ändliga Blaschke-produkter är viktiga byggstenar för teorin om interpolation och approximation i komplexa talplanet.

Ändliga Blaschke-produkter

Fasporträtt av en ändlig Blaschke-produkt av gradtal $n = 30$

