

Komplex analys I, v.38

Derivata och analytiska funktioner

I detta avsnitt undersöker vi deriverbarheten för komplexvärda funktioner och påvisar den starka kopplingen för en analytisk funktion mellan reella delen $u(x, y)$ och imaginära delen $v(x, y)$ via Cauchy-Riemanns differentialekvationer.

Definition 2.8. Låt $f(z)$ vara en komplexvärd funktion som är definierad i en omgivning av punkten z_0 . Derivatan av f i punkten z_0 definieras genom

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (2.16)$$

ifall gränsvärdet existerar och är olika ∞ .

Anmärkning: Gränsvärdet i (2.16) måste existera och vara lika oberoende av i vilken riktning vi närmar oss punkten z_0 .

I analogi med reell analys har vi att deriverbarhet medför kontinuitet.

Sats 2.10. *Om den komplexvärda funktionen f är deriverbar i en punkt z_0 , så är den kontinuerlig i punkten.*

Bevis: För $z \neq z_0$ gäller

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \rightarrow f'(z_0) \cdot 0 = 0, \text{ då } z \rightarrow z_0.$$

Alltså $f(z) \rightarrow f(z_0)$, då $z \rightarrow z_0$, och därmed är f kontinuerlig i z_0 . $\square$

Derivata och analytiska funktioner

Följande deriveringsregler bevisas på samma sätt som de motsvarande reella deriveringsreglerna. Bevisen lämnas som övningsuppgifter. Om f och

g är deriverbara i punkten z_0 , så gäller

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0), \quad (2.17)$$

$$(cf)'(z_0) = cf'(z_0), \quad c \in \mathbb{C}, \quad (2.18)$$

$$(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0), \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}, \quad g(z_0) \neq 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{dz}f(g(z))\Big|_{z=z_0} = f'(g(z_0))g'(z_0), \quad \text{om } f'(g(z_0)) \text{ existerar.} \quad (2.21)$$

Formel (2.21) kallas kedjeregeln.

Exempel 2.4. Visa att $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$ för alla positiva heltal n .

Lösning: Med beteckningen $\Delta z = z - z_0$ och med hjälp av binomialsatsen formar vi om differenskvoten,

$$\begin{aligned} \frac{(z_0 + \Delta z)^n - z_0^n}{\Delta z} &= \frac{\left(\binom{n}{0} z_0^n + \binom{n}{1} z_0^{n-1} \Delta z + \dots + \binom{n}{n} (\Delta z)^n\right) - z_0^n}{\Delta z} \\ &= n z_0^{n-1} + \binom{n}{2} z_0^{n-2} \Delta z + \dots + (\Delta z)^{n-1} \\ &\rightarrow n z_0^{n-1}, \quad \text{då } \Delta z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Alltså gäller $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$ för alla positiva heltal n och alla $z \in \mathbb{C}$.

Exempel 2.5. Med stöd av föregående exempel och formlerna (2.17) och (2.18) fås att varje polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

är deriverbart i hela $\mathbb{C}$ och derivatan ges av

$$p'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + 2 a_2 z + a_1.$$

Med stöd av (2.20) fås att varje rationell funktion är deriverbar i sin definitionsmängd, dvs. i hela $\mathbb{C}$ med nämnarens nollställen undantagna.

Derivata och analytiska funktioner

Definition 2.9. En komplexvärd funktion f är analytisk i den öppna mängden M om f är deriverbar i varje punkt av M . En funktion f är analytisk i punkten z_0 om f är deriverbar i någon cirkelskiva $D(z_0, r)$. Om f är analytisk i hela $\mathbb{C}$ så kallas f en hel funktion.

Anmärkning 1: Med stöd av Exempel 2.5 inses att varje polynom är en hel funktion.

Anmärkning 2: Om f är deriverbar på en mängd M som saknar inre punkter, t.ex. ett linjestycke i $\mathbb{C}$, så är f inte analytisk i M .

Definition 2.10. Funktionerna $u(x, y)$ och $v(x, y)$, som är avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$, säges satisfiera *Cauchy-Riemanns differentialekvationer* i punkten (x_0, y_0) om deras partiella derivator i punkten existerar och det gäller att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.22)$$

i punkten (x_0, y_0) .

Att en funktion f är deriverbar i en punkt innebär en stark bindning mellan funktionens reella och imaginära del. Vi skall påvisa att denna bindning ges av Cauchy-Riemanns differentialekvationer.

Derivata och analytiska funktioner

Antag att $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $z = x + iy$, är deriverbar i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$. Då måste gränsvärdet av differenskvoten vara lika oberoende av i vilken riktning vi närmar oss z_0 .

1. Låt $y = y_0$, $z = x + iy_0$. Vi närmar oss z_0 horisontalt längs linjen $y = y_0$.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + i v(x, y_0) - (u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0))}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = u'_x(x_0, y_0) + i v'_x(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{2.23}$$

2. Låt $x = x_0$, $z = x_0 + iy$. Vi närmar oss z_0 vertikalt längs linjen $x = x_0$.

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) + i v(x_0, y) - (u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0))}{x_0 + iy - (x_0 + iy_0)} \\&= \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \\&= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) - i u'_y(x_0, y_0).\end{aligned}\tag{2.24}$$

Derivata och analytiska funktioner

Nu kan vi identifiera reella och imaginära delarna i (2.23) och (2.24) och erhåller därmed att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

gäller i punkten (x_0, y_0) . Alltså har vi bevisat följande sats.

Sats 2.11. Om den komplexvärda funktionen f , $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, är deriverbar i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$, så uppfylls Cauchy-Riemanns differentialekvationer i punkten (x_0, y_0) . Därmed gäller: Om f är analytisk i en öppen mängd M så gäller Cauchy-Riemanns differentialekvationer i varje punkt i M . Vidare gäller för $(x_0, y_0) \in M$ att

$$\underline{f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \left(= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right)}. \quad (2.25)$$

Exempel 2.6. Visa att funktionen $f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$ inte är analytisk i någon punkt.

Lösning: $u(x, y) = x^2 + y$ och $v(x, y) = y^2 - x$. Då gäller

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad \text{och} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1.$$

Alltså gäller CR-differentialekvationer enbart på linjen $y = x$, och därmed inte i någon cirkelskiva. Då kan inte f vara analytisk i någon punkt i $\mathbb{C}$. (Ty om f vore analytisk i $z_0 \in \mathbb{C}$, så skulle CR-differentialekvationer gälla i någon cirkelskiva $D(z_0, r)$.)

Derivata och analytiska funktioner

Att u och v uppfyller CR-differentialekvationer i en punkt (x_0, y_0) garanterar inte att f är deriverbar i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$. Vi måste också kräva att de partiella derivatorna av u och v existerar i en öppen omgivning av z_0 och är kontinuerliga i z_0 .

Sats 2.12. Låt $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ vara definierad i en öppen mängd M som innehåller punkten $z_0 = x_0 + iy_0$. Om de partiella derivatorna u'_x , u'_y , v'_x och v'_y existerar i M , är kontinuerliga i (x_0, y_0) och uppfyller Cauchy-Riemanns differentialekvationer i (x_0, y_0) , då är f deriverbar i punkten z_0 . Därmed gäller: Om de partiella derivatorna av första ordning av u och v är kontinuerliga i en öppen mängd M och Cauchy-Riemanns diff.ekvationer gäller i hela M , så är f analytisk i M .

Derivata och analytiska funktioner

Bevis: Eftersom M är en öppen mängd och $z_0 \in M$, så kan vi betrakta punkter $z = x + iy$ som tillhör en cirkelskiva $D(z_0, r)$ som ligger helt i M , ($D(z_0, r) \subset M$). Vi bildar differenskvoten

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{(x - x_0) + i(y - y_0)}, \quad (2.26)$$

där $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $z = x + iy$ och $z_0 = x_0 + iy_0$.

(1) Betrakta skillnaden $u(x, y) - u(x_0, y_0) = (u(x, y) - u(x_0, y)) + (u(x_0, y) - u(x_0, y_0))$. För fixt y är $u(x, y)$ kontinuerlig i $[x_0, x]$ (eller $[x, x_0]$ om $x_0 > x$), och deriverbar i (x_0, x) (eller (x, x_0) om $x_0 > x$). Medelvärdessatsen ger att det finns ett x^* mellan x och x_0 sådant att $u(x, y) - u(x_0, y) = u'_x(x^*, y)(x - x_0)$. (Här beror x^* av både x och y , $x^* = x^*(x, y)$). Alltså gäller det att

$$u(x, y) - u(x_0, y) = (x - x_0) \frac{\partial u}{\partial x}(x^*, y). \quad (2.27)$$

Derivata och analytiska funktioner

$$u(x, y) - u(x_0, y) = (x - x_0) \frac{\partial u}{\partial x}(x^*, y). \quad (2.27)$$

Då nu u'_x är kontinuerlig i (x_0, y_0) , saamt $x^*(x, y) \rightarrow x_0$ och $y \rightarrow y_0$ då $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, så kan vi skriva

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x^*, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_1,$$

där ε_1 beror av både x och y och $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Därmed kan vi skriva (2.27) i formen

$$u(x, y) - u(x_0, y) = (x - x_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_1 \right), \quad (2.28)$$

där $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. En analog behandling av uttrycket $u(x_0, y) - u(x_0, y_0)$ ger att vi kan skriva

$$u(x_0, y) - u(x_0, y_0) = (y - y_0) \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \varepsilon_2 \right), \quad (2.29)$$

Derivata och analytiska funktioner

(2) Omskrivning av täljarens imaginära del i (2.26) ger att $v(x, y) - v(x_0, y_0) = (v(x, y) - v(x_0, y)) + (v(x_0, y) - v(x_0, y_0))$. En med fallet (1) analog behandling ger att

$$\begin{aligned}v(x, y) - v(x_0, y) &= (x - x_0) \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_3 \right), \\v(x_0, y) - v(x_0, y_0) &= (y - y_0) \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + \varepsilon_4 \right),\end{aligned}\tag{2.30}$$

där $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ och $\varepsilon_4 \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Sammanställning av uttrycken (2.26) - (2.30) ger

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x - x_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1 + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \varepsilon_3 \right) + (y - y_0) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2 + i \frac{\partial v}{\partial y} + i \varepsilon_4 \right)}{(x - x_0) + i(y - y_0)},\tag{2.31}$$

där de partiella derivatorna evalueras i punkten (x_0, y_0) och $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, då $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Med stöd av CR-differentialekvationer formas högerled i (2.31) om till

Derivata och analytiska funktioner

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x - x_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1 + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \varepsilon_3 \right) + (y - y_0) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2 + i \frac{\partial v}{\partial y} + i \varepsilon_4 \right)}{(x - x_0) + i (y - y_0)}, \quad (2.31)$$

där de partiella derivatorna evalueras i punkten (x_0, y_0) och $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, då $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Med stöd av CR-differentialekvationer formas högerled i (2.31) om till

$$\frac{(x - x_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + i (y - y_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)}{(x - x_0) + i (y - y_0)} + \frac{\lambda}{(x - x_0) + i (y - y_0)}, \quad (2.32)$$

där $\lambda \equiv (x - x_0)(\varepsilon_1 + i \varepsilon_3) + (y - y_0)(\varepsilon_2 + i \varepsilon_4)$. Då gäller

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda}{(x - x_0) + i (y - y_0)} \right| &\leq \left| \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i (y - y_0)} \right| |\varepsilon_1 + i \varepsilon_3| \\ &+ \left| \frac{y - y_0}{(x - x_0) + i (y - y_0)} \right| |\varepsilon_2 + i \varepsilon_4| \\ &\leq |\varepsilon_1 + i \varepsilon_3| + |\varepsilon_2 + i \varepsilon_4| \\ &\rightarrow 0, \quad \text{då } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Med stöd av (2.26), (2.32) och (2.33) erhålls

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Därmed existerar derivatan av f i punkten z_0 och den ges av uttrycket

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + i v'_x(x_0, y_0). \quad \square$$

Derivata och analytiska funktioner

Exempel 2.7. Sats 2.12 ger att funktionen i Exempel 2.6, $f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$ där $z = x + iy$, som inte är analytisk i någon punkt i $\mathbb{C}$, är
deriverbar i punkter z med $x = y$.

Exempel 2.8. Visa att $f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$, där $z = x + iy$, är en hel
funktion och bestäm funktionens derivata.

Lösning: Vi har att

$$u'_x = e^x \cos y, \quad u'_y = -e^x \sin y, \quad v'_x = e^x \sin y \quad \text{och} \quad v'_y = e^x \cos y.$$

De partiella derivatorna är kontinuerliga i hela $\mathbb{R}^2$ och uppfyller i varje punkt
CR-differentialekvationer. Då är f analytisk i hela $\mathbb{C}$ och därmed en hel
funktion. Vi ser att f' ges av

$$f'(z) = u'_x(x, y) + i v'_x(x, y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

Alltså gäller $f'(z) = f(z)$ i hela $\mathbb{C}$. (En bra kandidat för en komplex exponentialfunktion ?!).

Exempel 2.9. Låt f vara definierad genom

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{om } |z| < 1, \\ 1, & \text{om } |z| > 2. \end{cases}$$

Då är $f'(z) \equiv 0$ på f 's definitionsmängd, men f är inte konstant. Definitionsmängden är en öppen mängd, men den är inte sammanhängande.

Derivata och analytiska funktioner

Sats 2.13. Om f är analytisk i ett område M och om $f'(z) = 0$ i hela M ,
då är f konstant i M .

Bevis: Eftersom två godtyckliga punkter i ett område M alltid kan förenas
med en bruten linje som ligger helt i M , så räcker det att visa att f är
konstant på varje linjestycke L i M . Ett linjestycke L i M kan ges en param-
eterframställning $z(t) = x(t) + iy(t)$, där $x(t) = at + b$ och $y(t) = ct + d$,

$0 \leq t \leq 1$, och a, b, c, d är reella konstanter. Låt $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
Då är f :s värden på L givna av

$$U(t) + iV(t) = u(at + b, ct + d) + iv(at + b, ct + d), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.34)$$

Med hjälp av kedjeregeln beräknar vi $U'(t)$ och $V'(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = a \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + c \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Eftersom $0 = f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + i v'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) - i u'_y(x_0, y_0)$ för
varje $z_0 \in M$ har vi att $u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0$ i hela M . Därmed har vi att
 $U'(t) = 0$ och $V'(t) = 0$ för $0 \leq t \leq 1$, vilket medför att $U(t)$ och $V(t)$ är
konstanta för $0 \leq t \leq 1$, dvs. på hela L . Därmed är f konstant på L och i
hela M . $\square$

Harmoniska funktioner

Lösningar $\phi(x, y)$ till Laplace' ekvation

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.36)$$

har viktiga tillämpningar inom potentialteori i fysiken.

Definition 2.11. En reellvärd funktion $\phi(x, y)$ säges vara harmonisk i ett område M om alla partiella derivator av andra ordning är kontinuerliga i M och om ϕ är en lösning till Laplace' ekvation (2.36) i hela M .

Harmoniska funktioner

Sats 2.14. Om $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ är analytisk i ett område M , så är $u(x, y)$ och $v(x, y)$ harmoniska i M .

Bevis: Vi skall senare visa att för alla analytiska funktioner gäller att u och v har kontinuerliga partiella derivator av andra ordningen. Vi antar nu att detta är bekant. Under detta antagande vet vi att

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.37)$$

Med hjälp av CR-differentialekvationer, (som ju gäller i M), formaras ekvationerna i (2.37) om i formen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \end{aligned}$$

och därmed är $u(x, y)$ och $v(x, y)$ harmoniska i M . $\square$

Harmoniska funktioner

Om vi vet att funktionen $u(x, y)$ är harmonisk i ett område M , så kan vi bestämma en annan harmonisk funktion $v(x, y)$ så att $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ är en analytisk funktion i M . Funktionen $v(x, y)$ kallas då det harmoniska konjugatet av $u(x, y)$. Proceduren illustreras med ett exempel.

Harmoniska funktioner

Exempel 2.10. Konstruera en i $\mathbb{C}$ analytisk funktion vars realdel ges av $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y$.

Lösning: Vi har att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0,$$

alltså är $u(x, y)$ harmonisk i hela talplanet $\mathbb{R}^2$. Nu söker vi en funktion $v(x, y)$ som uppfyller CR-differentialekvationer.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{och} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 1. \quad (2.38)$$

Om vi betraktar x som konstant och integrerar med avseende på y i den första ekvationen i (2.38) erhålls

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + \psi(x), \quad (2.39)$$

där $\psi(x)$ är en deriverbar funktion av x . Insättning av (2.39) i den andra ekvationen i (2.38) ger

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \psi'(x) = 6xy - 1,$$

alltså har vi $\psi'(x) = -1$, vilket innebär att $\psi(x) = -x + c$, där c är en reell konstant. Då ges det harmoniska konjugatet av $u(x, y)$ av funktionen

Harmoniska funktioner

$v(x, y) = 3x^2y - y^3 - x + c$, där c är en reell konstant. Därmed ges den sökta analytiska funktionen f av

$$\begin{aligned} f(z) &= x^3 - 3xy^2 + y + i(3x^2y - y^3 - x + c) \\ &= z^3 - i(z - c), \quad z = x + iy, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$(z^2 = x^2 - y^2 + i2xy, \quad z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3))$$

Kontinuerliga kurvor

Definition 2.12. Antag att $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ med $\alpha < \beta$. En kontinuerlig funktion $z : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ säges definiera en kontinuerlig kurva Γ i $\mathbb{C}$. Γ uppfattas som funktionens värdeområde, $\Gamma = \{z(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$. Ekvationen $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, kallas kurvans ekvation i parameterform med t som parameter. Punkterna $a = z(\alpha)$ och $b = z(\beta)$ kallas kurvans begynnelsepunkt respektive slutpunkt. Riktningen från a till b kallas kurvans positiva riktning.

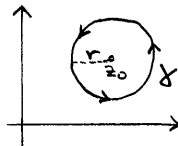
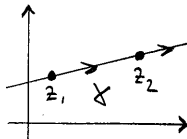
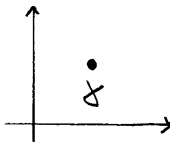


Anmärkning: Ekvationen $z = z(\alpha + \beta - t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, representerar samma kurva men genomlöst i motsatt riktning. Den “motsatta kurvan” betecknas $-\Gamma$.

Kontinuerliga kurvor

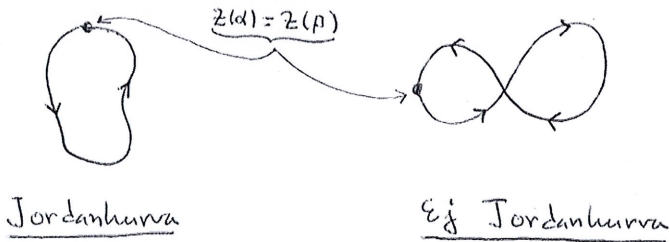
Exempel 2.11. Exempel på kontinuerliga kurvor:

- (1) "Punktkurvan" $z = c (= \text{konstant})$.
- (2) Räta linjen $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $-\infty < t < \infty$, genom punkterna z_1 och z_2 . Om $0 \leq t \leq 1$ fås sträckan mellan z_1 och z_2 .
- (3) Cirkeln $z = z_0 + r(\cos t + i \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, med medelpunkten z_0 och radien r .



Kontinuerliga kurvor

Definition 2.13. En kurva Γ med ekvationen $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, är sluten om $z(\alpha) = z(\beta)$. En sluten kurva som inte skär sig själv är en Jordankurva. För en Jordankurva gäller $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ och $t_1 \neq t_2$ medför att $z(t_1) \neq z(t_2)$.



Kontinuerliga kurvor

Definition 2.14. Antag att $z : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ är skriven i formen $z(t) = x(t) + iy(t)$, där x och y är reella funktioner av t . Om $x'(t_0)$ och $y'(t_0)$ existerar för $t_0 \in [\alpha, \beta]$, (högerderivatan om $t_0 = \alpha$, vänsterderivatan om $t_0 = \beta$), så definieras $z'(t_0)$ genom

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0). \quad (2.40)$$

För en reell kurva given av $x = x(t)$, $y = y(t)$, vet vi att kurvan har en väldefinierad tangent i varje punkt t_0 där $x'(t_0) \neq 0$ eller $y'(t_0) \neq 0$. Tangentriktningen ges av vektorn $(x'(t_0), y'(t_0))$. Då $z'(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow (x'(t_0) \neq 0 \text{ eller } y'(t_0) \neq 0)$ så ges tangentriktningen av $\theta = \arg z'(t_0)$. Vi har således

Sats 2.15. Kurvan Γ med ekvationen $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, har en bestämd tangent i varje punkt $z(t_0)$ där $z'(t_0)$ existerar och är olika 0. Tangentens riktningsvinkel är $\theta = \arg z'(t_0)$.

Kontinuerliga kurvor

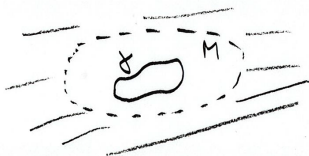
Definition 2.15. Kurvan Γ säges vara regulär, om Γ kan framställas genom någon ekvation $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, sådan att $z'(t)$ är kontinuerlig och olika 0 för $\alpha \leq t \leq \beta$.

Om kurvorna $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ är sådana att γ_1 :s slutpunkt sammanfaller med γ_2 :s begynnelsepunkt, γ_2 :s slutpunkt sammanfaller med γ_3 :s begynnelsepunkt osv., så betecknar $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ den sammansatta kurvan $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$. En kurva Γ säges vara styckevis regulär, om Γ kan framställas i formen $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$, där $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ är regulära.



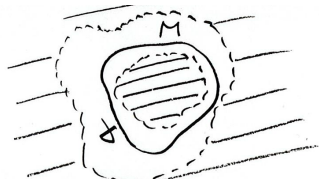
Kontinuerliga kurvor

Definition 2.16. Ett område M säges vara enkelt sammanhängande om för varje Jordankurva $\Gamma \in M$ gäller att området innanför Γ tillhör M .



M enkelt sammanhängande

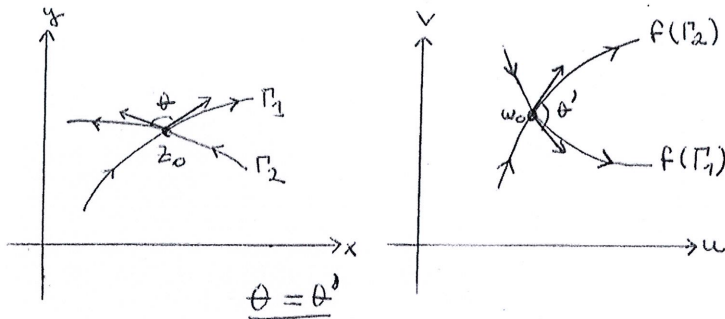
27



M område, ej enkelt sammanhängande

Konform avbildning

Definition 2.17. En avbildning $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ säges vara konform (vinkeltrogen) i en punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, om f är kontinuerlig i en omgivning av z_0 och vinkeln mellan två godtyckliga regulära kurvor genom z_0 är densamma som vinkeln mellan deras bildkurvor i punkten $w_0 = f(z_0)$.



Konform avbildning

Sats 2.16. Om f är analytisk i ett område M , så förmedlar f en konform avbildning $w = f(z)$ i varje punkt $z_0 \in M$ där $f'(z_0) \neq 0$.

Bevis: Låt $z_0 \in M$ och $f'(z_0) \neq 0$. Låt Γ vara en regulär kurva $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ i M och antag att $z_0 = z(t_0)$, $\alpha \leq t_0 \leq \beta$. Vektorn $z'(t_0) \neq 0$ ger då tangentriktningen för Γ i z_0 . Γ avbildas av f på en kurva Γ' i w -planet, där Γ' ges av $w = w(t) = f(z(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Vektorn $w'(t_0)$ ger tangentriktningen för Γ' i punkten $w_0 = f(z(t_0))$ om $w'(t_0) \neq 0$. Med stöd av kedjeregeln erhålls då att

$$w'(t_0) = f'(z(t_0))z'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0. \quad (2.41)$$

Argumentet för $w'(t_0)$ bestäms ur (2.41)

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0)).$$

Varje regulär kurva Γ genom z_0 har alltså en bildkurva Γ' vars tangentriktning i $w_0 = f(z_0)$ fås genom att rotera tangenten för Γ i punkten z_0 med vinkeln $\arg(f'(z_0))$. Denna rotationsvinkel är oberoende av valet av Γ . Avbildningen är konform. $\square$

Fasporträtt av komplexvärda funktioner

Antag att $w = f(z) = f(x + i y)$ är en komplexvärd funktion av en komplex variabel. Ett fasporträtt av f över rektangeln $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ i komplexa talplanet är en färgläggning av punkterna z i rektangeln enligt argumentet för $f(z)$. I varje punkt z där $f(z)$ är olika noll är kvoten $f(z)/|f(z)|$ ett tal på komplexa enhetscirkeln. Komplexa enhetscirkeln ger en färgkod som då bestämmer färgen på punkten z i rektangeln. Nedan till vänster fasporträttet av $f(z) = z$ och till höger fasporträttet av $f(z) = (z-1/2)(z+1/2)/(z-i/2)$ på rektangeln $[-1,1] \times [-1,1]$. Experimentera med den utdelade Matlab-koden och läs mera om fasporträtt i artikeln: <http://www.ams.org/notices/201106/rtx110600768p.pdf>

