Komplex analys I, v.36

Komplex analys I, 5 sp, 273040

Kurstider: v. 36 – v. 42 (4.9 – 19.10)

- Föreläsningar : Må 10 - 12 och O 15 - 17 i Föreläsningssal Lindelöf.
- Demonstrationer: To 13 - 15 i Lindelöf, börjande vecka 37.
  Frivillig ikryssning av räknade hemtal. Bonuspoäng till kurstenten: 50%, 75% och 90% lösta hemtal ger 1, 2 respektive 3 bonuspoäng till tenten.

(Rektors beslut: 10 - 12 = 10.15 - 11.45 och 13 - 15 = 13.30 – 15.00)

Kurslitteratur: Föreläsningsanteckningar och kurskompendiet *Analytiska funktioner,* tillgängligt på kurshemsidan:

http://www.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/analytiska/

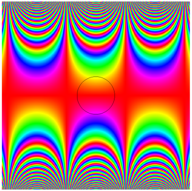
Kursmapp: Kopior av kursmaterial i datasalen, (bredvid sal Lindelöf).

Kurstent: Må 23.10 kl. 9-13 i Aud I.

Kursinnehåll

- Axiomatiskt införda komplexa talkroppen
- Räkneoperationer med komplexa tal
- Potenser och n-te rötter
- Komplexa talplanet, delmängder av det och topologiska begrepp
- Utvidgade komplexa talplanet (Riemann-sfären)

- Komplexa talföljder, konvergens och Cauchy-följder
- Komplexvärda funktioner av en komplex variabel, $z = x + i\,y$,
  $w = f(z) = f(x + i\,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$,
  där u och v är reellvärda funktioner av de reella variablerna x och y
- Visualisering av funktioner $w = f(z)$ över mängder i komplexa talplanet med hjälp av **fasporträtt**. (Finns inte i kompendiet). Exempelvis $f(z) = exp(sin(z))$ över rektangeln $-5 < x < 5$ och $-5 < y < 5$ har fasporträttet:



Kursinnehåll

- Gränsvärden, kontinuitet och deriverbarhet
- Funktionen *f(z)* är **analytisk** i en öppen mängd *G* om *f* är deriverbar i varje punkt av *G*. Då uppfylls **Cauchy-Riemanns** differentialekvationer av *u(x,y)* och *v(x,y)*
- Parameterframställda kurvor och konform avbildning

- Elementära funktioner och deras avbildningar av områden i komplexa talplanet
- Polynom, rationella funktioner, exponentialfunktioner , logaritmfunktioner, trigonometriska funktioner och hyperboliska funktioner
- Konform avbildning av ett givet område på ett annat givet område genom sammansättningar av elementära funktioner

- **Möbiustransformationer** avbildar ”cirkelområden” på ”cirkelområden”

Historiska notiser

- **Tredje- och fjärdegrads polynomekvationer** (1500-talet): Behov av att kunna tolka betydelsen av rötter av negativa tal. **Cardanos formler.** (Italienska matematiker, Ferro, Tartaglia, Cardano).
- **Euler** införde symbolen i för roten av talet -1 år 1777, samt upptäckte sambandet $\exp(i\,x) = \cos x + i \sin x$, och att $\log z = \log r + i\,(\alpha + 2\pi n)$, där n är ett heltal och där $z = r\,(\cos\alpha + i \sin\alpha)$.
- Ungefär 1800 **Komplexa talplanet,** komplexa talens framställning som ordnade reella talpar. (Gauss, Argand, Wessel).
- **1800-talet:**
  - **Cauchy:** Integrationsteori
  - **Weierstrass:** Potensserier
  - **Riemann:** Analytiska funktioners avbildningar

Komplexa tal

Den axiomatiskt införda reella talkroppen $\mathbb{R}$ och räkneoperationerna med reella tal antas bekanta. (Se kursen i Analys I, Protter och Morrey: A first course in real analysis).

Definition 1.1. De *komplexa* talen $\mathbb{C}$ definieras som mängden av ordnade reella talpar, $\{(a, b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$, med addition och multiplikation definierade genom formlerna

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{1.1}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)\,. \tag{1.2}$$

Två komplexa tal (a, b) och (c, d) är lika om och endast om $a = c$ och $b = d$.

Komplexa tal

Låt $z = (a, b)$ och $z_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2, 3$, beteckna godtyckliga komplexa tal. Genom att verifiera att de komplexa talen satisfierar nedanstående axiom bevisar man att $\mathbb{C}$ **bildar en talkropp.**

(1) $\mathbb{C}$ är sluten under addition och multiplikation:

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{C} \quad \text{och} \quad z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C} .$$

(2) Associationslagarna:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad \text{och} \quad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 .$$

(3) Kommutationslagarna:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{och} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 .$$

(4) $(0, 0)$ är det entydigt bestämda neutrala elementet vid addition:

$$\forall z \in \mathbb{C} : z + (0, 0) = z .$$

$(1, 0)$ är det entydigt bestämda neutrala elementet vid multiplikation:

$$\forall z \in \mathbb{C} : z \cdot (1, 0) = z .$$

(5) För varje $z \in \mathbb{C}$ finns en entydigt bestämd additiv invers i $\mathbb{C}$, betecknad $-z$, sådan att

$$z + (-z) = (0,0) .$$

För varje $z \neq (0,0)$ i $\mathbb{C}$ finns en entydigt bestämd multiplikativ invers i $\mathbb{C}$, betecknad z^{-1}, sådan att

$$z \cdot z^{-1} = (1,0) .$$

(Notera att $(z = (a,b) \Rightarrow -z = (-a,-b)$ och $z = (a,b) \Rightarrow z^{-1} = (a/(a^2+b^2), -b/(a^2+b^2))$.

(6) Distributionslagen:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 .$$

Komplexa tal

Exempel 1.1. Att det neutrala elementet $(0,0)$ i (4) är entydigt bestämt fås genom att visa att $(0,0)$ är ett neutralt element (lätt), och därefter antar vi att $(a,b) \in \mathbb{C}$ är ett neutralt element för addition. Då erhåller vi med hjälp av (4) och (3) att

$$(a,b) \overset{(4)}{=} (a,b) + (0,0) \overset{(3)}{=} (0,0) + (a,b) = (0,0)\,.$$

Att den additiva inversen i (5) för $z \in \mathbb{C}$ är entydigt bestämd fås genom att antaga att $z + z_1 = (0,0)$ och $z + z_2 = (0,0)$, varvid (2), (3) och (4) ger att

$$\begin{aligned} z_1 &\overset{(4)}{=} z_1 + (0,0) = z_1 + (z + z_2) \overset{(2)}{=} (z_1 + z) + z_2 \overset{(3)}{=} (z + z_1) + z_2 \\ &= (0,0) + z_2 \underset{(3)}{=} z_2 + (0,0) = z_2\,. \end{aligned}$$

Vi skall nu införa **skillnad** och **kvot** för komplexa tal. För godtyckliga tal (a,b) och (c,d) har ekvationen

$$(c,d) + (x,y) = (a,b)$$

en entydigt bestämd lösning (x,y) i $\mathbb{C}$, ty med stöd av (1.1) fås att ekvationen är ekvivalent med att $c + x = a$ och $d + y = b$, vilket är ekvivalent med att $x = a - c$ och $y = b - d$. Vi inför då **skillnaden** mellan (a,b) och (c,d) som den entydigt bestämda lösningen till ekvationen, dvs

$$(a,b) - (c,d) = (a - c, b - d)\,. \tag{1.3}$$

Om vi nu antar att (a, b) och (c, d) är godtyckliga komplexa tal med $(c, d) \neq (0, 0)$ så har ekvationen

$$(c, d) \cdot (x, y) = (a, b)$$

en entydigt bestämd lösning i $\mathbb{C}$, ty med stöd av (1.2) fås att ekvationen är ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}$$

som på grund av att $c^2 + d^2 \neq 0$ har den entydigt bestämda lösningen

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{och} \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,.$$

Vi inför kvoten mellan (a, b) och (c, d), då $(c, d) \neq (0, 0)$, som den entydigt bestämda lösningen till ovanstående ekvation,

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} := \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right), \quad \text{då } (c, d) \neq (0, 0)\,. \tag{1.4}$$

Komplexa tal

Låt nu $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ beteckna den delmängd av $\mathbb{C}$ som ges av

$$\mathbb{C}_{\mathbb{R}} := \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Då är $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ sluten under addition, multiplikation, subtraktion och kvotbildning, ty med stöd av (1.1), (1.2), (1.3) och (1.4) gäller det för godtyckliga $(a, 0), (b, 0) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ att

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \tag{1.5}$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0) \tag{1.6}$$

$$(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0) \tag{1.7}$$

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)} = \left(\frac{a}{b}, 0\right), \quad b \neq 0. \tag{1.8}$$

Då uppfyller $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ axiomen för en talkropp i (1)–(6) ovan, och är därmed en **delkropp av $\mathbb{C}$**. Om vi definierar en bijektiv avbildning $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ genom

$$\forall a \in \mathbb{R} : f(a) = (a, 0), \tag{1.9}$$

Komplexa tal

så följer det av (1.5) och (1.6) att f är en isomorfi mellan $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Vi kan därför identifiera $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ med $\mathbb{R}$ och skriver i fortsättningen a istället för $(a, 0)$. Vi kan därmed betrakta $\mathbb{R}$ som en **delkropp** av $\mathbb{C}$, samt $\mathbb{C}$ som en utvidgning av den reella talkroppen $\mathbb{R}$. Nu införs beteckningen

$$i := (0, 1)\,, \tag{1.10}$$

varvid (1.2) ger att $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0) = -1$. Vi får alltså sambandet

$$i^2 = -1\,. \tag{1.11}$$

Låt $z = (a, b)$ vara ett godtyckligt komplext tal. Då erhålls

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + i \cdot b$$

I fortsättningen används beteckningssättet

$$z = a + ib \tag{1.12}$$

för det komplexa talet $z = (a, b)$, varvid i kallas **imaginära enheten**, a kallas **reella delen** av z, beteckning $a = \operatorname{Re} z$, och b kallas **imaginära delen** av z, beteckning $b = \operatorname{Im} z$. Nu kan formlerna (1.1), (1.2), (1.3) och (1.4) skrivas

(1.5) – (1.8):

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,\ 0+0) = (a+b,\ 0)$$

$$(a,0)\cdot(b,0) = (a\cdot b - 0\cdot 0,\ a\cdot 0 + 0\cdot b) = (ab,\ 0)$$

$$(a,0)-(b,0) = (a-b,\ 0-0) = (a-b,\ 0)$$

$$\frac{(a,0)}{(b,0)} = \left(\frac{ab+0\cdot 0}{b^2+0^2},\ \frac{0\cdot b - a\cdot 0}{b^2+0^2}\right) = \left(\frac{a}{b},\ 0\right),\quad b\neq 0$$

$$\forall\, a,b\in\mathbb{R}:\ \left.\begin{cases} f(a)+f(b) = f(a+b) \\ f(a)\cdot f(b) = f(ab)\end{cases}\right\}\ \text{f isomorfi.}$$

$$\left(a+b = f^{-1}(f(a)+f(b)),\quad ab = f^{-1}(f(a)\cdot f(b))\right)$$

Komplexa tal

z, beteckning $b = \operatorname{Im} z$. Nu kan formlerna (1.1), (1.2), (1.3) och (1.4) skrivas i formen

$$(a+ib)+(c+id) = a+c+i(b+d)\,, \tag{1.13}$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac-bd+i(ad+bc)\,, \tag{1.14}$$

$$(a+ib)-(c+id) = a-c+i(b-d)\,, \tag{1.15}$$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\cdot\frac{bc-ad}{c^2+d^2}, \qquad c^2+d^2 \neq 0\,. \tag{1.16}$$

Formlerna (1.13) – (1.16) erhålls genom att tillämpa de vanliga räknelagarna för reella tal och beakta att $i^2 = -1$. Formel (1.16) fås enklast genom förlängning med nämnarens konjugattal:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\cdot\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,.$$

Exempel 1.2. Om $z \in \mathbb{C}$ och $b \in \mathbb{R}$ så gäller

$$z^2+b^2 = (z+ib)(z-ib)\,.$$

Därmed har ekvationen $z^2+b^2=0$ alltid två rötter, $z = \pm ib$, i $\mathbb{C}$.

Belopp och konjugat

Definition 1.2. Låt $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, vara ett godtyckligt komplext tal. Talets *absolutbelopp* eller *modul* betecknas $|z|$ och definieras genom

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{1.17}$$

Konjugattalet till z, betecknat $\overline{z}$, definieras genom

$$\overline{z} = a - ib\,. \tag{1.18}$$

I följande sats sammanställs några räkneregler för konjugattal och absolutbelopp.

Belopp och konjugat

Sats 1.1. *Låt z, z_1 och z_2 vara godtyckliga komplexa tal. Då gäller*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2\,, \tag{1.19}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2\,, \tag{1.20}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2\,, \tag{1.21}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\,, \quad z_2 \neq 0\,, \tag{1.22}$$

$$Re\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad och \quad Im\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})\,, \tag{1.23}$$

$$|z| = |\overline{z}| \quad och \quad |z|^2 = z \cdot \overline{z}\,, \tag{1.24}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|\,, \tag{1.25}$$

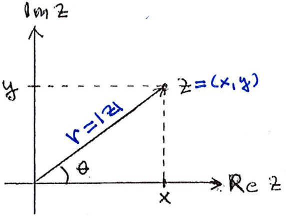
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,, \quad z_2 \neq 0\,. \tag{1.26}$$

Bevis: Beviset lämnas som övningsuppgift. $\square$

Notera med stöd av (1.23) att $z \in \mathbb{C}$ är reellt om och endast om $z = \overline{z}$.

Komplexa talplanet

Ur definitionen på komplexa tal följer att $z \in \mathbb{C}$ kan representeras entydigt som en punkt $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ i ett rätvinkligt, tvådimensionellt koordinatsystem. Det komplexa talet $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, representeras då av punkten (x, y) i ett koordinatsystem där x-axeln och y-axeln kallas den **reella** respektive **imaginära** axeln.



Talet z kan även tolkas som vektorn från origo till punkten (x, y). Om längden av denna vektor betecknas med r noterar vi med stöd av (1.17) att $r = |z|$. Då vi tolkar $|x|$ och $|y|$ som längden av kateterna och $|z|$ som längden av hypotenusan i en rätvinklig triangel erhålls olikheterna

$$|x| = |\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{och} \quad |y| = |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \tag{1.27}$$

$$|z| \leq |x| + |y| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|\,. \tag{1.28}$$

Komplexa talplanet

Den vinkel θ som vektorn $z \neq 0$ bildar med den positiva x-axeln kallas z:s **argument**, beteckning $\arg z$. Argumentet är bestämt på en additiv multipel av 2π när. Nu gäller för $z \neq 0$ att

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{|z|}, \\ \sin\theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{|z|}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

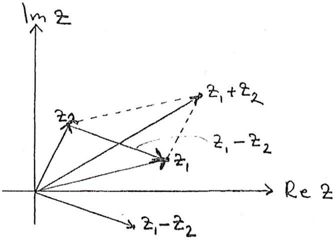
Med beaktande av att $r = |z|$ fås ur (1.29) den **polära framställningen** av talet $z = x + iy$,

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta). \tag{1.30}$$

Vidare erhålls ur (1.29) formlerna

$$\begin{cases} \arg z = \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{då } x > 0, \\ \arg z = \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{då } x < 0. \end{cases} \tag{1.31}$$

Vi skall nu ge räkneoperationerna mellan komplexa tal en grafisk tolkning i det komplexa talplanet.



På grund av (1.1) inses att additionen $z_1 + z_2$ av två komplexa tal kan tolkas som vektoraddition i $\mathbb{R}^2$. Vidare har vi att $z_2 + (z_1 - z_2) = z_1$, så skillnaden $z_1 - z_2$ representeras av den vektor som utgår från z_2:s ändpunkt och utsträcker sig till z_1:s ändpunkt. Vi kan alltså tolka $|z_1 - z_2|$ som **avståndet** mellan z_1 och z_2. Det är då naturligt att införa följande definition.

Komplexa talplanet

Definition 1.3. *Avståndet* mellan de komplexa talen $z_1 = x_1 + i\,y_1$ och $z_2 = x_2 + i\,y_2$ betecknas $d(z_1, z_2)$ och definieras genom formeln

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,. \tag{1.32}$$

Exempel 1.3. Den origocentrerade cirkeln med radien r utgörs av $\{z \in \mathbb{C} : d(z, 0) = |z| = r\}$. Cirkeln med medelpunkten $z_0 \in \mathbb{C}$ och radien r ges av $\{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) = |z - z_0| = r\}$.

Ur ovanstående figur kan vi grafiskt utläsa att $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Detta bör verifieras analytiskt,

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\
&= z_1\,\bar{z}_1 + z_1\,\bar{z}_2 + z_2\,\bar{z}_1 + z_2\,\bar{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + z_1\,\bar{z}_2 + \overline{(z_1\,\bar{z}_2)} + |z_2|^2 \qquad (\bar{\bar{z}} = z) \\
&= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\,\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\
&\le |z_1|^2 + 2\,|z_1\,\bar{z}_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2 .
\end{aligned}
$$

Alltså gäller $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Vidare inses, eftersom $|-z| = |z|$, att $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$. Man kan också visa att $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2|$, (övningsuppgift). Vi sammanfattar utredningarna i **triangelolikheten**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : ||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2| . \tag{1.33}$$

Med fullständig induktion kan högra olikheten i (1.33) generaliseras i formen

$$|z_1 \pm z_2 \pm \cdots \pm z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| . \tag{1.34}$$

Komplexa talplanet

Definition 1.4. En icke-tom mängd M försedd med en avbildning $d_M : M \times M \to \mathbb{R}$ som uppfyller axiomen

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \forall\, x, y \in M : d_M(x,y) \geq 0 \quad och \quad d_M(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\
&(2)\ \forall\, x, y \in M : d_M(x,y) = d_M(y,x), \\
&(3)\ \forall\, x, y, z \in M : d_M(x,z) \leq d_M(x,y) + d_M(y,z),
\end{aligned}
$$

kallas ett *metriskt rum*, beteckning (M, d_M), och d_M kallas en *metrik*.

Exempel 1.4. De komplexa talen $\mathbb{C}$ med d definierad enligt (1.32) är ett metriskt rum, $(\mathbb{C}, d)$. Axiomen (1) och (2) är lätta att verifiera. Vidare gäller för $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ att

$$
\begin{aligned}
d(z_1, z_3) &= |z_1 - z_3| = |(z_1 - z_2) + (z_2 - z_3)| \\
&\leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)\,.
\end{aligned}
$$

Därmed är axiom (3) uppfyllt.

Komplexa talplanet

Avslutningsvis skall vi grafiskt tolka multiplikation och division av komplexa tal. Betrakta två komplexa tal $z_1, z_2 \neq 0$ givna i polär form, $z_j = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)$, $j = 1, 2$. Vi erhåller då

$$
\begin{aligned}
w = z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)] \\
&= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)),
\end{aligned}
$$

eller med andra ord

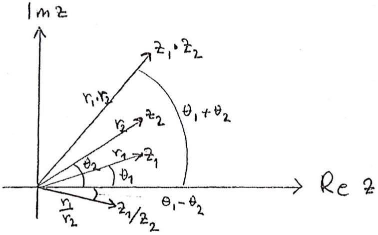
$$|w| = |z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, \tag{1.35}$$

$$\arg w = \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2\,. \tag{1.36}$$

Två tal i $\mathbb{C}$ multipliceras så, att **modulerna multipliceras** och **argumenten adderas.**

Komplexa talplanet

Två tal i $\mathbb{C}$ multipliceras så, att **modulerna multipliceras** och **argumenten adderas**.



Om vi betraktar kvoten $w = z_1/z_2$ och skriver den som $z_1 = w \cdot z_2$, så ger (1.35) och (1.36) att $|z_1| = |w|\,|z_2|$ och $\arg z_1 = \arg w + \arg z_2$. Alltså gäller

$$|w| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.37}$$

$$\arg w = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 . \tag{1.38}$$

Två tal i $\mathbb{C}$ divideras så, att **modulerna divideras** och **argumenten subtraheras**.

Moivres formel

Låt $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ vara ett godtyckligt tal i polär form. Upprepad användning av (1.35) och (1.36) ger oss

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + i\sin\theta)\,, \\ z^2 &= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\,, \\ z^3 &= r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)\,, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Genom fullständig induktion bevisas formeln

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.39}$$

Speciellt för $r = 1$ kallas (1.39) **Moivres formel**,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.40}$$

För $z \neq 0$ och n ett positivt heltal definieras $z^{-n} := (z^{-1})^n$.

Moivres formel

Exempel 1.5. Beräkna $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^4$. **Lösning:** Vi noterar att $|\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = 2$ och att $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vi får då med stöd av (1.39) att

$$(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^4 = \left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^4 = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^4$$
$$= 2^4(\cos\pi + i\,\sin\pi) = -16\,.$$

Exempel 1.6. Uttryck $\cos 3\theta$ och $\sin 3\theta$ med hjälp av potenser av $\cos\theta$ och $\sin\theta$. **Lösning:** Moivres formel med $n = 3$ ger

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\,\sin 3\theta &= (\cos\theta + i\,\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta + i\,3\cos^2\theta\,\sin\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta - i\,\sin^3\theta\\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta) + i\,(3\cos^2\theta\,\sin\theta - \sin^3\theta)\,.\end{aligned}$$

Identifiering av reella och imaginära delen ger formlerna

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\,,\\ \sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\,\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\,.\end{aligned}$$

Definition 1.5. Ett tal $z \in \mathbb{C}$ är en *n:te rot* av det komplexa talet w om

$$z^n = w\,, \tag{1.41}$$

där $n > 0$ är ett heltal. $w^{1/n}$ betecknar mängden av alla n:te rötter av w.

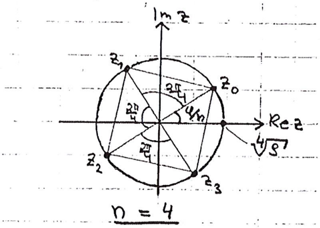
Vi skall nu söka alla lösningar till ekvationen (1.41) och ansätter därför $z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ och $w = \rho\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \neq 0$. Då gäller

$$r^n\,(\cos n\theta + i\,\sin n\theta) = \rho\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = |w|\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,,$$

vilket ger $r^n = \rho > 0$ och $n\theta = \varphi + k \cdot 2\pi$ för heltaligt k. Vi erhåller

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\,2\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\,2\pi}{n}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.42}$$

Man ser att (1.42) ger precis n stycken **olika** n:te rötter z_k svarande mot $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Dessa z_k:n bildar hörn i en regelbunden n-hörning inskriven i cirkeln $|z| = \sqrt[n]{\rho}$. Fallet $n = 4$ illustreras i nedanstående figur.



Vi får då formeln

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\,2\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\,2\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, \ldots, n-1\,, \quad (1.43)$$

för n:te rötterna av w. Betrakta speciellt fallet $w = 1$. Då fås de n:te **enhetsrötterna** ε_k,

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{k\,2\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{k\,2\pi}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1\,, \qquad (1.44)$$

svarande mot en regelbunden n-hörning inskriven i enhetscirkeln $|z| = 1$ med $\varepsilon_0 = 1$. Om vi sätter $w_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\,\sin(\frac{2\pi}{n})$, svarande mot $k = 1$ i (1.44), får vi med stöd av Moivres formel att

$$\varepsilon_k = w_n^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{1.45}$$

och observerar att (1.43) kan skrivas i formen

$$z_k = z_0\,\varepsilon_k = z_0\,w_n^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{1.46}$$

Exempel 1.7. Beräkna $(\sqrt{2} + i\,\sqrt{2})^{1/3}$. **Lösning:** Vi omskriver $\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}$ i den polära formen $2\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4})$. Då har vi med stöd av (1.43) lösningen

$(|w| = 2,\ \varphi = \pi/4,\ n = 3)$

$$(\sqrt{2} + i\,\sqrt{2})^{1/3} = \left\{ \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ k = 0, 1, 2 \right\}.$$

(Rötterna till ekvationen $z^3 = \sqrt{2} + i\cdot\sqrt{2}$)

Definition: En reell n:te rot till ett reellt tal b är ett reellt tal x sådant att $x^n = b$.

I] $b > 0$.

a) n jämnt. Två reella n:te rötter, en positiv och en negativ.

Den positiva betecknas $\sqrt[n]{b}$ ($\sqrt{b}$ om $n = 2$)

b) n udda. En reell n:te rot, positiv,

beteckning: $\sqrt[n]{b}$

II] $b < 0$.

a) n jämnt. Ingen reell n:te rot

b) n udda. En reell n:te rot som är negativ

beteckning : $\sqrt[n]{b}$

Räknelagar: (då alla n:te rötter existerar)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$