7 Cauchys integralformel med tillämpningar

7.1 Cauchys integralformel

I detta kapitel beräknas kurvintegralerna längs Jordankurvor. Om inget annat nämns så sker integrationen alltid ett varv i positiv omloppsled. Den positiva omloppsleden för en Jordankurva Γ definieras så, att området innanför Γ ligger till vänster, när kurvan genomlöps i positiv riktning.

Följande viktiga sats visar att om $f(z)$ är analytisk på och innanför en Jordankurva Γ, så bestäms funktionens värden innanför Γ helt av funktionsvärdena på Γ.

Sats 7.1. Cauchys integralformel. *Antag att $f(z)$ är analytisk på och innanför den styckevis reguljära Jordankurvan Γ. Området innanför Γ kallas G. För godtyckligt $a \in G$ gäller det att:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,. \tag{7.1}$$

Bevis: Tag en cirkel C med ekvationen $|z-a| = r$, sådan att cirkelskivan $|z-a| \leq r$ tillhör G. (Detta är möjligt då G är en öppen mängd). Enligt Sats 6.8 gäller det att

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,, \tag{7.2}$$

ty funktionen $\frac{f(z)}{z-a}$ är analytisk på Γ och på C, samt i området mellan kurvorna. Betrakta identiteten

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_C \frac{f(a)}{z-a}\, dz + \int_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz\,. \tag{7.3}$$

Med stöd av formel (6.12) gäller

$$\int_C \frac{f(a)}{z-a}\, dz = f(a)\, 2\pi i\,. \tag{7.4}$$

Då f är kontinuerlig i punkten $z = a$, så hör till varje $\varepsilon > 0$ ett $\delta > 0$, sådant att $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ såsnart $|z-a| < \delta$. För $r < \delta$ och $z \in C$ gäller det att

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| < \frac{\varepsilon}{r}\,.$$

Då gäller

$$\left|\int_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz\right| \leq \int_C \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| |dz| < \frac{\varepsilon}{r}\int_C |dz| = \frac{\varepsilon}{r}\,2\pi\,r = 2\pi\,\varepsilon\,. \tag{7.5}$$

Då integralen i vänstra ledet av (7.5) är oberoende av r, (Sats 6.8), och oberoende av ε, så kan vi låta ε gå mot noll och får att integralen är noll. Med stöd av detta och (7.2), (7.3) och (7.4) får vi då att

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi\,i\,f(a),$$

vilket är Cauchys integralformel. □

Exempel 7.1. Beräkna $\int_C \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz$, då C betecknar cirkeln $|z-i|=1$.
Lösning: Vi upplöser integranden i partialbråk

$$\frac{\sin z}{z^2+1} = \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\sin z,$$

varav följer att

$$\int_C \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2i}\int_C \frac{\sin z}{z-i}\,dz - \frac{1}{2i}\int_C \frac{\sin z}{z+i}\,dz\,. \tag{7.6}$$

Med stöd av Cauchys integralformel gäller

$$\int_C \frac{\sin z}{z-i}\,dz = 2\pi\,i\,\sin(i), \tag{7.7}$$

ty $\sin z$ är analytisk på och innanför C och $z=i$ ligger innanför C. Eftersom punkten $z=-i$ ligger utanför C är funktionen $\frac{\sin z}{z+i}$ analytisk på och innanför C. Då ger Sats 6.7 att

$$\int_C \frac{\sin z}{z+i}\,dz = 0\,. \tag{7.8}$$

Med stöd av (7.6), (7.7) och (7.8) erhålls då att

$$\int_C \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2i}\left(2\pi\,i\,\sin(i)\right) = \pi\,i\,\sinh 1\,.$$

Exempel 7.2. Beräkna integralen $\int_\Gamma \frac{e^z+\sin z}{z}\,dz$, där Γ är cirkeln $|z-2|=3$ genomlöpt ett varv i positiv omloppsled.
Lösning: Sätt $f(z)=e^z+\sin z$. Då är f analytisk på och innanför Γ, som är en Jordankurva. Vidare ligger $z=0$ innanför Γ. Med stöd av Cauchys integralformel gäller

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-0}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^z+\sin z}{z}\,dz\,.$$

Då $f(0)=e^0+\sin 0=1$, erhålls

$$\int_\Gamma \frac{e^z+\sin z}{z}\,dz=2\pi i\,f(0)=2\pi i\,.$$

Exempel 7.3. Beräkna den reella integralen $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}$.
Lösning: Sätt $z=e^{i\theta}$. Då gäller $\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$ och $\frac{dz}{d\theta}=i\,e^{i\theta}\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{i\,z}$. Integranden omskrivs i formen

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}&=\frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\frac{2dz}{4iz+z^2-1}\\&=\frac{2dz}{(z-i(\sqrt{3}-2))(z+i(\sqrt{3}+2))}\,.\end{aligned}\tag{7.9}$$

Sätt $f(z)=\frac{2}{z+i(\sqrt{3}+2))}$. Då ger Cauchys integralformel att

$$\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-i(\sqrt{3}-2)}\,dz=2\pi i\,f(i(\sqrt{3}-2))=\frac{2\pi i\,2}{i(\sqrt{3}-2)+i(\sqrt{3}+2)}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Å andra sidan gäller med stöd av (7.9) att:

$$\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-i(\sqrt{3}-2)}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{(e^{i\theta}-i(\sqrt{3}-2))}\,i\,e^{i\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}\,.$$

Därmed gäller

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

7.2 Serieutveckling av analytiska funktioner

Sats 7.2. *Antag att $f(z)$ är analytisk i ett område D och antag att cirkelskivan $|z - z_0| \leq r$ ligger i D. Låt C vara cirkeln $|z - z_0| = r$. Då gäller för $|z - z_0| < r$ att*

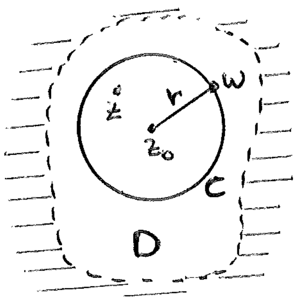
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{7.10}$$

där koefficienterna c_n ges av

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{7.11}$$

Bevis: Välj $z \in D$ sådant att $|z - z_0| = s < r$. För godtyckligt $w \in C$, dvs. $|w - z_0| = r$, gäller det att

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)}. \tag{7.12}$$



Då $\left|\frac{z - z_0}{w - z_0}\right| = \frac{s}{r} < 1$, så konvergerar den geometriska serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^k = \left(1 - \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)\right)^{-1}. \tag{7.13}$$

Serien $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k$ konvergerar, ty $0 < s < r$. För godtyckligt givet $\varepsilon > 0$ finns då ett N sådant att $\sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k < \varepsilon$. För alla w med $|w - z_0| = r$ och för alla $n \geq N$ gäller

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^k\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{w - z_0}\right|^k = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k < \varepsilon. \tag{7.14}$$

Vi utnyttjar Cauchys integralformel, (7.12) och (7.13) för att erhålla följande identitet som gäller för alla n,

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z_0}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{z-z_0}{w-z_0}\Big)^k\Big\}\,dw \\ =& \sum_{k=0}^{n}(z-z_0)^k\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\Big\} \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z_0}\Big\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\frac{z-z_0}{w-z_0}\Big)^k\Big\}\,dw\,. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Om vi sätter

$$E(z,z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z_0}\Big\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\frac{z-z_0}{w-z_0}\Big)^k\Big\}\,dw$$

och betecknar $M = \max_{w\in C}|f(z)|$, får vi för $n \geq N$ uppskattningen

$$\begin{aligned} |E(z,z_0)| &= \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z_0}\Big\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\frac{z-z_0}{w-z_0}\Big)^k\Big\}\,dw\Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_C\Big|\frac{f(w)}{w-z_0}\Big|\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\frac{z-z_0}{w-z_0}\Big)^k\Big|\,|dw| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r}\cdot\varepsilon\cdot\int_C|dw| = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r}\cdot\varepsilon\cdot 2\pi r = M\cdot\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Men då ger (7.15) och (7.16) att för $n \geq N$ gäller

$$\Big|f(z) - \sum_{k=0}^{n}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\Big\}(z-z_0)^k\Big| = |E(z,z_0)| \leq M\,\varepsilon\,.$$

Då konvergerar potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$, där c_n ges av (7.11), mot $f(z)$ för varje z i cirkelskivan $|z-z_0| < r$. □

Anmärkning 1: Cirkeln C i (7.10) kan med stöd av Sats 6.19 bytas mot en styckevis regulär Jordankurva γ som är sådan att z_0 ligger innanför γ och $f(z)$ är analytisk på och innanför γ.
Anmärkning 2: Om $f(z)$ är en hel funktion, (analytisk i hela $\mathbb{C}$), så gäller potensserieutvecklingen (7.10) i hela $\mathbb{C}$.

Definition 7.1. En punkt z_0 är en *regulär punkt* för en funktion $f(z)$ om $f(z)$ är analytisk i punkten. Om $f(z)$ inte är analytisk i punkten z_0 är den en *singulär punkt* för $f(z)$.

Anmärkning: Potensserien (7.10) konvergerar i $|z - z_0| < r$, där r är avståndet från z_0 till närmaste singulära punkt för $f(z)$.

Med hjälp av Sats 5.14 och Sats 7.2 kan vi etablera följande sats, som säger att om en funktion är analytisk i en punkt z_0, så har den derivator av alla ordningar i punkten.

Sats 7.3. *Antag att $f(z)$ är analytisk i området D. Då har $f(z)$ derivator av alla ordningar i punkten $z_0 \in D$. Dessa ges av*

$$f^{(p)}(z_0) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{p+1}} \, dw \,, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{7.17}$$

där C är cirkeln $|z - z_0| = r$, och $f(z)$ är analytisk på och innanför C. Vidare erhålls Taylorserien

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \,, \tag{7.18}$$

som konvergerar mot $f(z)$ i $|z - z_0| < r$.

Bevis: Med stöd av Sats 7.2 kan $f(z)$ utvecklas i potensserien

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \,, \tag{7.19}$$

som konvergerar i $|z - z_0| < r$, och där

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw \,.$$

Med stöd av Sats 5.14 har potensserien (7.19) derivator av alla ordningar i $|z - z_0| < r$. Dessa fås genom termvis derivering,

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n \, n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n - p + 1) \, (z - z_0)^{n-p} \,. \tag{7.20}$$

Om vi sätter $z = z_0$ i (7.20) erhålls $f^{(p)}(z_0) = c_p \cdot p!$, alltså gäller (7.17). Vidare, eftersom $c_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$, $p = 0, 1, ...$, får vi med stöd av (7.19) Taylorserien (7.18). □

Anmärkning 1: För beräkning av $f^{(p)}(z_0)$ kan cirkeln C i (7.17) ersättas med en styckevis regulär Jordankurva γ som omsluter punkten z_0, och som är sådan att f är analytisk på och innanför γ.
Anmärkning 2: Formel (7.17) kan betraktas som en generalisering av Cauchys integralformel, som ju fås för $p = 0$.

Exempel 7.4. Låt $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \arg z$, där $-\pi < \arg z \leq \pi$. Sätt $f(z) = \operatorname{Log}(1+z)$. Då är $f'(z) = \frac{1}{1+z}$ och $f(z)$ analytisk i $|z| < 1$ med $f(0) = 0$. Vidare ges de högre derivatorna av

$$f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}, \; f'''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}, \; \ldots, \; f^{(n)}(z) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+z)^n}.$$

Med $z_0 = 0$ ger då (7.18) Taylorserien

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1.$$

Exempel 7.5. Beräkna $\int_C \frac{e^z - \cos z}{z^3}\, dz$, där C är enhetscirkeln genomlöpt ett varv i positiv omloppsled.
Lösning: Sätt $f(z) = e^z - \cos z$. Då är $f(z)$ analytisk i hela $\mathbb{C}$, och speciellt på och innanför C. Nu gäller att $f''(z) = e^z + \cos z$, att $z_0 = 0$ ligger innanför C och att $f''(z_0) = 2$. Å andra sidan får vi med stöd av (7.17) att

$$f''(0) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-0)^3}\, dz = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{e^z - \cos z}{z^3}\, dz.$$

Alltså

$$\int_C \frac{e^z - \cos z}{z^3}\, dz = 2\pi i.$$

Exempel 7.6. Cauchys estimat. Antag att $f(z)$ är analytisk på mängden $\{z : |z - z_0| \leq r\}$. Låt C vara cirkeln $|z - z_0| = r$. Då gäller

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_C \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\, |dz| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{\max_{z\in C}|f(z)|}{r^{n+1}}\cdot\int_C |dz| = \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{\max_{z\in C}|f(z)|}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r.\end{aligned}$$

Därmed gäller

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{z \in C} |f(z)|. \tag{7.21}$$

Speciellt för $n = 0$ gäller:

$$|f(z_0)| \leq \max_{z \in C} |f(z)|.$$

7.3 Identitetssatsen för analytiska funktioner

Identitetssatsen för analytiska funktioner säger att om en funktion är analytisk i ett område D, och vi känner värdena för funktionen i en delmängd M av D som har en hopningspunkt i D, så är funktionen entydigt bestämd i D. Vi bevisar först en hjälpsats, identitetssatsen för potensserier.

Sats 7.4. *Antag att potensserierna $S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ och $S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ konvergerar i $D = \{z : |z - z_0| < R > 0\}$. Antag vidare att $S_1(z) = S_2(z)$ för alla $z \in M$, där M är en delmängd av D med $z_0 \in D$ som hopningspunkt. Då gäller $S_1(z) = S_2(z)$ för alla $z \in D$.*

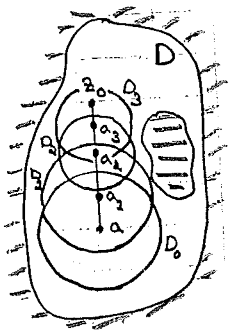
Bevis: Sätt $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, där $c_n = a_n - b_n$ för alla n. Serien är konvergent i D och $S(z) = 0$ för alla $z \in M$. Eftersom $z_0 \in D$ är en hopningspunkt för mängden M kan vi konstruera en följd $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$, där $z_j \in M$, $z_j \neq z_0$ för alla j och $z_j \to z_0$ då $j \to \infty$. Nu är $S(z_j) = 0$ för $j = 1, 2, \ldots$, vilket ger att $\lim_{j\to\infty} S(z_j) = 0$. Å andra sidan gäller $\lim_{j\to\infty} S(z_j) = S(z_0) = c_0$, ty S är kontinuerlig i punkten z_0. Då är $c_0 = 0$. Gör nu induktionsantagandet att $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$. Vi skall visa att av detta följer att $c_n = 0$. Vårt antagande ger att

$$\begin{aligned} S(z) &= c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots = (z - z_0)^n g(z), \\ g(z) &= c_n + c_{n+1}(z - z_0) + c_{n+2}(z - z_0)^2 + \ldots . \end{aligned} \tag{7.22}$$

Insättning av $z = z_j$ i (7.22) ger: $0 = (z_j - z_0)^n g(z_j)$, $j = 1, 2, \ldots$. Eftersom $z_j \neq z_0$ ger detta att $g(z) = 0$ för $z = z_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Därmed gäller: $0 = \lim_{j\to\infty} g(z_j) = g(z_0) = c_n$, eftersom $g(z)$ är kontinuerlig i z_0. Genom fullständig induktion får vi då att $c_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Därmed är $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, och $S_1(z) = S_2(z)$ för alla $z \in D$. □

Sats 7.5. Identitetssatsen för analytiska funktioner. *Om funktionerna $f(z)$ och $g(z)$ är analytiska i området D och om $f(z) = g(z)$ i en delmängd M av D som har $a \in D$ som hopningspunkt, så är $f(z) \equiv g(z)$ i D.*

Bevis: Tag godtyckligt $z_0 \in D$. Då kan a och z_0 förbindas med en bruten linje L i D. Vi kan bilda en kedja av öppna cirkelskivor $D_0, D_1, ..., D_n$ med medelpunkterna $a, a_1, ..., a_n$ på L (se figur).



Konstruktionen är sådan att $a_1 \in D_0, a_2 \in D_1, ..., a_n \in D_{n-1}$ och $z_0 \in D_n$. Nu kan $f(z)$ och $g(z)$ utvecklas i potensserierna $S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ respektive $S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$, som konvergerar i D_0. Låt M_0 vara restriktionen av M till D_0. Då har M_0 punkten a som hopningspunkt, och $S_1(z) = S_2(z)$ i M_0. Med stöd av Sats 7.4 är då $S_1(z) \equiv S_2(z)$ i D_0, dvs. $f(z) \equiv g(z)$ i D_0. Då nu $a_1 \in D_0$ kan vi konstruera en mängd $M_1 \subset D_1 \cap D_0$ sådan att a_1 är hopningspunkt för M_1. Vidare gäller $f(z) = g(z)$ i M_1. Då kan vi analogt med ovanbeskrivna förfarande utveckla $f(z)$ och $g(z)$ i potensserier kring a_1 och får att $f(z) \equiv g(z)$ i D_1. Upprepning av resonemanget ger att $f(z) \equiv g(z)$ i $D_0, D_1, ..., D_n$. Eftersom $z_0 \in D_n$ gäller det att $f(z_0) = g(z_0)$. Valet av $z_0 \in D$ var godtyckligt, så $f(z) \equiv g(z)$ i hela D. □

Exempel 7.7. Påstående: Antag att $f(z)$ är analytisk i området D. Om $f(z) \not\equiv 0$ i D, så är nollställena för $f(z)$ separerade.
Bevis: Låt $z_0 \in D$ vara ett nollställe för $f(z)$. Antag att z_0 är en hopningspunkt för en följd $z_1, z_2, ...$ av nollställen för $f(z)$ i D. Då ger Sats 7.5 att $f(z) \equiv 0$ i D. Alltså: Om $f(z) \not\equiv 0$ i D så är inget nollställe för $f(z)$ i D en hopningspunkt för nollställen till $f(z)$ i D. Vi kan med andra ord för varje nollställe z_0 till $f(z)$ hitta en cirkelskiva $\{z : |z - z_0| < r\}$ som inte innehåller andra nollställen än z_0. Därmed är nollställena för $f(z) \not\equiv 0$ i D separerade. □

7.4 Gauss' medelvärdessats. Liouvilles sats. Algebrans fundamentalsats

Sats 7.6. Gauss' medelvärdessats. *Om $f(z)$ är en analytisk funktion i cirkelskivan $|z-a| \leq r$, så är funktionens värde i medelpunkten a lika med medelvärdet av funktionsvärdena på periferin. Alltså:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\,e^{i\theta})\,d\theta\,. \tag{7.23}$$

Bevis: Låt cirkeln $C : |z-a| = r$ ha parameterframställningen $z = z(\theta) = a + r\,e^{i\theta}$. Då är $z'(\theta) = i\,r\,e^{i\theta}$ och med hjälp av Cauchys integralformel får vi

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + r\,e^{i\theta})}{a + r\,e^{i\theta} - a}\, i\,r\,e^{i\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\,e^{i\theta})\,d\theta\,. \quad \square \end{aligned}$$

En hel funktion är som bekant en funktion som är analytisk i hela $\mathbb{C}$. Sådana funktioner är bland annat e^z, $\sin z$, $\cos z$ och varje polynom.

Sats 7.7. Liouvilles sats. *Om en hel funktion är begränsad, så är den en konstant.*

Bevis: Antag att $f(z)$ är en hel funktion och att $|f(z)| \leq M$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Tag en godtycklig punkt $a \in \mathbb{C}$. Vi skall visa att $f'(a) = 0$. Betrakta cirkeln $C : |z-a| = r$. Formel (7.17) ger oss att

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\,. \tag{7.24}$$

På cirkeln C gäller uppskattningen

$$\left|\frac{f(z)}{(z-a)^2}\right| = \frac{|f(z)|}{|z-a|^2} \leq \frac{M}{r^2}\,. \tag{7.25}$$

Då ger oss (7.24) och (7.25) att

$$\begin{aligned} |f'(a)| &= \left|\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_C \left|\frac{f(z)}{(z-a)^2}\right| |dz| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^2} \int_C |dz| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot 2\pi\,r = \frac{M}{r}\,. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Då nu r kan väljas godtyckligt stort får vi med stöd av (7.26) att $f'(a) = 0$ måste gälla. Punkten a var godtyckligt vald, så $f'(z) \equiv 0$ i hela $\mathbf{C}$. Då är $f(z)$ en konstant. □

Sats 7.8. Algebrans fundamentalsats. *Varje polynom, som inte är en konstant, har åtminstone ett nollställe.*

Bevis: Låt $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$, vara ett polynom av gradtal n, $n \geq 1$. **Antites:** $p(z)$ saknar nollställen. I kapitel 3 visade vi att $|p(z)| \to \infty$, då $|z| \to \infty$. Då finns det ett positivt reellt tal r sådant att $|p(z)| > 1$ då $|z| > r$. Definiera $H(z) = \frac{1}{p(z)}$ i hela $\mathbb{C}$. Eftersom $p(z)$ saknar nollställen så är $H(z)$ analytisk i hela $\mathbb{C}$, dvs. H är en hel funktion. Eftersom $H(z)$ är en kontinuerlig funktion på den kompakta mängden $|z| \leq r$, så existerar med stöd av Sats 2.9 ett tal M_1 sådant att $|H(z)| \leq M_1$ på $|z| \leq r$. Å andra sidan gäller för $|z| > r$ att $|H(z)| = \frac{1}{|p(z)|} < 1$. Sätt $M = \max\{1, M_1\}$. Då gäller begränsningen $|H(z)| \leq M$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Med stöd av Liouvilles sats är då $H(z)$ en konstant i hela $\mathbb{C}$. Men detta innebär att även $p(z)$ är en konstant i hela $\mathbb{C}$. Vi får en motsägelse till vårt utgångsantagande att $p(z)$ är ett polynom av gradtal $n \geq 1$. Då är antitesen falsk och $p(z)$ har åtminstone ett nollställe i $\mathbb{C}$. □

När vi nu har bevisat algebrans fundamentalsats är resonemanget i kapitel 3 om antalet nollställen för ett polynom av gradtal n väl underbyggt.

7.5 Maximumprincipen. Schwarz' lemma

Följande sats säger i grova drag att "beloppet av en icke-konstant analytisk funktion har inga lokala maximipunkter i ett område".

Sats 7.9. Maximumprincipen. *Antag att $f(z)$ är en analytisk funktion på ett område D. Då gäller:*
(1) Om för $z_0 \in D$ gäller att $|f(z_0)| = M$ är ett lokalt maximum i D för $|f(z)|$, så är $f(z)$ konstant i hela D.
(2) Om den slutna mängden $\overline{D} = D \cup \partial D$ är begränsad och $f(z)$ är kontinuerlig på $\overline{D}$, så antas $\max_{z\in\overline{D}} |f(z)|$ på ∂D.

Bevis: 1. Antag att $z_0 \in D$ och att $|f(z_0)| = M$ är ett lokalt maximum för $|f(z)|$ i D. Då finns det en öppen cirkelskiva $C : |z - z_0| < R$ i D sådan att

$|z-z_0| < R \Rightarrow |f(z)| \le M$. För $0 < r < R$ definieras cirkeln $C_r : |z-z_0| = r$. Gauss' medelvärdessats ger då att

$$M = |f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,e^{i\theta})\,d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r\,e^{i\theta})|\,d\theta\,. \quad (7.27)$$

Nu är ju $M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,d\theta$, så med stöd av (7.27) erhålls

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|f(z_0 + r\,e^{i\theta})| - M)\,d\theta \ge 0\,. \quad (7.28)$$

För den kontinuerliga reella integranden i (7.28) gäller att $|f(z_0+r\,e^{i\theta})|-M \le 0$ för alla $\theta \in [0, 2\pi]$. Då måste $|f(z_0 + r\,e^{i\theta})| = M$ på hela C_r och integralen i (7.28) är noll. Detta gäller för alla $r : 0 < r < R$. Vidare är $|f(z_0)| = M$. Alltså är $|f(z)| = M$ i $C : |z - z_0| < R$. Med stöd av en hemuppgift är då $f(z)$ konstant i C. Identitetssatsen för analytiska funktioner ger att $f(z)$ är konstant i D.

2. $\overline{D}$ är en kompakt mängd och $|f(z)|$ är en kontinuerlig funktion på $\overline{D}$. Då antar $|f(z)|$ ett största värde i $\overline{D}$. Detta maximum är även ett lokalt maximum. Om $f(z)$ är konstant på D så är $f(z)$ av kontinuitetsskäl även konstant på $\overline{D}$. Maximet av $|f(z)|$ antas då i varje punkt i $\overline{D}$, alltså även på ∂D. Om $f(z)$ inte är konstant i D så har $|f(z)|$, enligt del (1) av satsen, inget lokalt maximum i D. Då antas alla lokala maxima på ∂D och det globala maximet av $|f(z)|$ antas då på ∂D. □

Exempel 7.8. Bestäm maximum av $|z^2 + 3z - 1|$ på $|z| \le 1$.
Lösning: Funktionen $f(z) = z^2 + 3z - 1$ är analytisk på den kompakta mängden $|z| \le 1$. Del (2) av föregående sats ger då att maximet av beloppet antas på enhetscirkeln $|z| = 1$. För att tillämpa maximumprincipen på enhetscirkeln gör vi uträkningarna

$$\begin{aligned}|z^2 + 3z - 1|^2 &= (z^2 + 3z - 1)(\overline{z}^2 + 3\overline{z} - 1)\\ &= (z\,\overline{z})^2 + 3z\,\overline{z}\,(z + \overline{z}) + 9z\overline{z} - (z^2 + \overline{z}^2) - 3(z + \overline{z}) + 1\,.\end{aligned}$$

Med beaktande av att $z\overline{z} = 1$ då $|z| = 1$, förenklas ovanstående uttryck till

$$11 - (z^2 + \overline{z}^2) = 11 - 2\,\mathrm{Re}\,(z^2)\,.$$

Detta uttryck antar sitt maximum 13 för $z = \pm i$. Alltså har vi att

$$\max_{|z|\le 1} |z^2 + 3z - 1| = \sqrt{13}, \quad \textit{då } z = \pm i\,.$$

Sats 7.10. Schwarz' lemma. *Antag att $f(z)$ är analytisk i området $D : |z| < 1$, att $f(0) = 0$ och att $|f(z)| \leq 1$ i D. Då gäller*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{för alla } z \in D\,. \tag{7.29}$$

Likhet i (7.29) för $z \neq 0$ inträffar endast om $f(z) = \lambda\, z$, där λ är en konstant med $|\lambda| = 1$.

Bevis: Eftersom $f(0) = 0$ så kan $f(z)$ skrivas i formen $f(z) = z\,h(z)$, där $h(z)$ är analytisk i D. Då är $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ analytisk i D. För $|z| = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, gäller:

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{1-\varepsilon} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\,. \tag{7.30}$$

Då ger maximumprincipen att $|g(z)| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$ i hela cirkelskivan $|z| \leq 1 - \varepsilon$. Eftersom ε kan väljas godtyckligt nära noll gäller $|g(z)| \leq 1$ för $|z| < 1$. Alltså gäller $|f(z)| = |g(z)|\,|z| \leq |z|$ för alla $z \in D$.

Vidare om $|f(z_0)| = |z_0|$ för något $z_0 \in D$ med $z_0 \neq 0$, så gäller $|g(z_0)| = 1$, vilket innebär att $|g(z)|$ har ett lokalt maximum i D. Då måste $g(z)$ vara en konstant λ med $|\lambda| = 1$, och därmed är $f(z) = \lambda\, z$. $\square$

Exempel 7.9. Låt $D = \{z : |z| < 1\}$. Om $f : D \to D$ är analytisk och bijektiv, med en i D analytisk invers f^{-1}, så är f av formen

$$f(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\,\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha} z - 1}, \quad |\alpha| < 1\,. \tag{7.31}$$

Bevis: Vi har redan tidigare visat att om f är av formen (7.31), så avbildar f området D bijektivt på D, är analytisk och har en analytisk invers, jämför Exempel 4.5. Vi skall visa att med antagandena i Exempel 7.9 måste f vara av formen (7.31). Antag nu att $f(0) = \alpha$, $|\alpha| < 1$, och definiera

$$g(z) = \frac{f(z) - \alpha}{\overline{\alpha}\, f(z) - 1} = S(f(z)),$$

där $S(z) = \frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}\, z - 1}$. Då är g en bijektiv analytisk avbildning av D på D och $g(0) = S(\alpha) = 0$. Då ger Schwartz' lemma att $|g(z)| \leq |z|$ för alla $z \in D$. Nu gäller $S^{-1}(w) = \frac{w-\alpha}{\overline{\alpha} w - 1} = S(w)$. Då gäller $g^{-1}(w) = f^{-1}(S^{-1}(w)) = f^{-1}(S(w))$, som är analytisk i D. Vidare är $g^{-1}(0) = f^{-1}(S(0)) = f^{-1}(\alpha) = 0$, och $|g^{-1}(w)| = |f^{-1}(S(w))| \leq 1$. Då ger Schwartz' lemma att $|g^{-1}(w)| \leq$

$|w|$ för alla w i D. Då gäller: $|g(z)| \leq |z| = |g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)|$ för alla $z \in D$. Därmed gäller det att $|g(z)| = |z|$ i hela D. Då är $g(z)$, med stöd av Schwartz' lemma, av formen $g(z) = \lambda\, z$. Då gäller:

$$S(f(z)) = g(z) = \lambda\, z \Leftrightarrow f(z) = S^{-1}(\lambda\, z) \Leftrightarrow$$

$$f(z) = S^{-1}(\lambda\, z) = \frac{\lambda z - \alpha}{\overline{\alpha}\lambda z - 1} = \lambda\, \frac{z - \overline{\lambda}\alpha}{\overline{\alpha}\lambda z - 1} = \mathrm{e}^{i\theta}\, \frac{z - \beta}{\overline{\beta} z - 1},$$

där $\mathrm{e}^{i\theta} = \lambda$ och $\beta = \alpha\overline{\lambda}$, $|\beta| < 1$. Alltså är $f(z)$ av formen (7.31). $\square$