6 Komplex integration

6.1 Kurvintegraler längs reguljära kurvor

Vi börjar med att definiera integralen av en komplexvärd funktion av en reell variabel.

Definition 6.1. Antag att $f(t) = u(t) + i\,v(t)$ är en komplex funktion av den reella variabeln t. Vi antar att $\alpha \leq t \leq \beta$. Då definieras

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta u(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta v(t)\,dt,, \tag{6.1}$$

förutsatt att de reella integralerna i högra ledet existerar.

Anmärkning: Om funktionen $f(t)$ är kontinuerlig så är även funktionerna $u(t)$ och $v(t)$ kontinuerliga i $[\alpha,\beta]$, och då existerar integralen (6.1).

Betrakta nu en komplex funktion f av den komplexa variabeln z. Vidare antar vi att Γ är en regulär kurva med parameterframställning $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Ytterligare antas att f är kontinuerlig på kurvan Γ. Vi inför:

Definition 6.2. *Kurvintegralen* av funktionen f längs kurvan Γ betecknas $\int_\Gamma f(z)\,dz$ och definieras genom

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt\,. \tag{6.2}$$

Integralen i högra ledet av (6.2) är av formen (6.1). Den är väldefinierad eftersom $f(z(t))$ och $z'(t)$ är kontinuerliga på intervallet $[\alpha,\beta]$. Om man vill framhäva ändpunkterna $a = z(\alpha)$ och $b = z(\beta)$ för kurvan Γ kan kurvintegralen betecknas med $\int_{a\Gamma}^b f(z)\,dz$.

Om $f(z)$ är **kontinuerlig** på den **styckevis reguljära kurvan** $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$, ($\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ reguljära), så definieras $\int_\Gamma f(z)\,dz$ genom:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz\,. \tag{6.3}$$

Definition 6.3. Om f är kontinuerlig på den reguljära kurvan Γ med parameterframställningen $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, så definierar vi

$$\int_\Gamma f(z)\,|dz| = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,|z'(t)|\,dt\,. \tag{6.4}$$

Exempel 6.1. Speciellt för $f(z) = 1$ och $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, fås med stöd av (6.4) att

$$\int_\Gamma 1 \cdot |dz| = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,,$$

vilket ju är båglängden av Γ. Alltså erhålls formeln

$$\int_\Gamma |dz| = \text{båglängden av } \Gamma\,, \tag{6.5}$$

för beräkning av en reguljär kurvas båglängd.

Då den komplexa integralen (6.2) är återförd på beräkning av två reella integraler, erhålls följande räkneregler:

$$\int_\Gamma k\, f(z)\, dz = k \int_\gamma f(z)\, dz, \quad k \in \mathbb{C}\,, \tag{6.6}$$

$$\int_\Gamma (f_1(z) + f_2(z))\, dz = \int_\Gamma f_1(z)\, dz + \int_\gamma f_2(z)\, dz\,, \tag{6.7}$$

$$\int_{-\Gamma} f(z)\, dz = -\int_\Gamma f(z)\, dz\,, \tag{6.8}$$

$$\left|\int_\Gamma f(z)\, dz\right| \leq \int_\Gamma |f(z)|\, |dz|\,. \tag{6.9}$$

Bevisen lämnas som övningsuppgifter.

Exempel 6.2. Antag att $\int_\Gamma f(z)\, dz$ existerar och att båglängden för kurvan Γ är L. Vidare antas att $|f(z)| \leq M$ på Γ. Då erhålls med stöd av (6.5) och (6.9) att

$$\left|\int_\Gamma f(z)\, dz\right| \leq \int_\Gamma |f(z)|\, |dz| \leq M \int_\Gamma |dz| = M\,L\,. \tag{6.10}$$

Exempel 6.3. Bevisa för $n \in \mathbb{Z}$ formlerna

$$\int_\Gamma (z - z_0)^n\, dz = 0, \quad n \neq -1\,, \tag{6.11}$$

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi\, i\,, \tag{6.12}$$

Då Γ är cirkeln $|z - z_0| = r$ genomlöpt ett varv i positiv omloppsled.

Lösning: Vi skriver ekvationen för Γ i parameterformen $z = z(t) = z_0 + r\,e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Då ges derivatan av $z'(t) = i\,r\,e^{it}$.
(1) $\underline{n \ne -1}$. Nu erhålls

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (z-z_0)^n\,dz &= \int_0^{2\pi} (z_0 + r\,e^{it} - z_0)^n\, ire^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,r^{n+1}e^{i(n+1)t}\,dt \\ &= ir^{n+1}\int_0^{2\pi} (\cos(n+1)t + i\sin(n+1)t)\,dt \\ &= ir^{n+1}\Big(\frac{1}{n+1}[\sin(n+1)t]_0^{2\pi} - \frac{i}{n+1}[\cos(n+1)t]_0^{2\pi}\Big) \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

(2) $\underline{n = -1}$. Nu gäller

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{z_0 + re^{it} - z_0}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,i\,.$$

Därmed är formlerna (6.11) och (6.12) bevisade. □

Exempel 6.4. Låt $f(z)$ vara kontinuerlig i $|z-z_0| < r$ och låt Γ_ε vara cirkeln $|z-z_0| = \varepsilon$. Visa att

$$f(z_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\,.$$

Lösning: Γ_ε har parameterframställningen $z = z(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it})\,dt\,.$$

Då gäller

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\Big| &= \Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(z_0+\varepsilon e^{it}) - f(z_0))\,dt\Big| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\Big(\max_{0\le t\le 2\pi} |f(z_0+\varepsilon e^{it}) - f(z_0)|\Big)\,2\pi \\ &\to 0, \text{ då } \varepsilon \to 0\,,\end{aligned}$$

ty f är kontinuerlig i punkten $z = z_0$.

Exempel 6.5. Beräkna $\int_{0\Gamma}^{1+i} \operatorname{Re} z\, dz$ längs a) räta linjen Γ_1 från 0 till $1+i$, b) brutna linjen $\Gamma_2 : 0 \to 1 \to 1+i$.
Lösning: a) Γ_1 ges av $z = z(t) = (1+i)t,\ 0 \le t \le 1$. Då gäller:

$$\int_{\Gamma_1} \operatorname{Re} z\, dz = \int_0^1 t(1+i)\, dt = (1+i)[t^2/2]_0^1 = \frac{1}{2}(1+i)\,.$$

b) Γ_2 är styckevis regulär, $\Gamma_2 = \gamma_3 + \gamma_4$, där γ_3 och γ_4 ges av:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &: z = z(t) = t,\ 0 \le t \le 1\,, \\ \gamma_4 &: z = z(t) = 1 + it,\ 0 \le t \le 1\,. \end{aligned}$$

Då gäller:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \operatorname{Re} z\, dz &= \int_{\gamma_3} \operatorname{Re} z\, dz + \int_{\gamma_4} \operatorname{Re} z\, dz = \int_0^1 t \cdot 1\, dt + \int_0^1 1 \cdot i\, dt \\ &= [t^2/2]_0^1 + i[t]_0^1 = \frac{1}{2} + i\,. \end{aligned}$$

Alltså är $\int_{0\Gamma}^{1+i} \operatorname{Re} z\, dz$ beroende av vägen Γ.

6.2 Integralens beroende av vägen

Definition 6.4. $F(z)$ är en *primitiv* funktion till $f(z)$ på mängden D om för varje $z \in D$ gäller att $F'(z) = f(z)$.

Sats 6.1. *Om den komplexvärda funktionen $f(t)$ är kontinuerlig på intervallet $[\alpha, \beta]$ och har en primitiv funktion $F(t)$ på$[\alpha, \beta]$, så gäller*

$$\int_\alpha^\beta f(t)\, dt = F(\beta) - F(\alpha)\,. \tag{6.13}$$

Bevis: Sätt $F(t) = U(t) + i\,V(t)$ och $f(t) = u(t) + i\,v(t)$. Nu är $F'(t) = f(t)$ på $[\alpha, \beta]$, vilket medför att $U'(t) = u(t)$ och $V'(t) = v(t)$ på $[\alpha, \beta]$. Då gäller

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(t)\, dt &= \int_\alpha^\beta u(t)\, dt + i \int_\alpha^\beta v(t)\, dt = \Big[U(t)\Big]_\alpha^\beta + i\Big[V(t)\Big]_\alpha^\beta \\ &= U(\beta) + i\,V(\beta) - (U(\alpha) + i\,V(\alpha)) \\ &= F(\beta) - F(\alpha)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Sats 6.2. *Antag att $f(z)$ är kontinuerlig i området D och har en primitiv funktion $F(z)$ i D. För varje styckevis regulär kurva γ i D med börjepunkt a och slutpunkt b gäller*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{a\Gamma}^{b} f(z)\,dz = F(b) - F(a)\,. \tag{6.14}$$

Bevis: Antag att $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$, där γ_k är reguljära kurvor med börjepunkterna a_k och slutpunkterna b_k, $k = 1, \dots, n$, där $a_1 = a$ och $b_n = b$. Låt γ_k ha parameterframställningen $z = z_k(t)$, $\alpha_k \le t \le \beta_k$, $k = 1, \dots, n$. Då gäller

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(z_k(t))\,z_k'(t)\,dt \Big)\,. \tag{6.15}$$

Eftersom $\frac{d}{dt}(F(z_k(t))) = F'(z_k(t))\,z_k'(t) = f(z_k(t))\,z_k'(t)$, $\alpha_k \le t \le \beta_k$, $k = 1, \dots, n$, så erhåller vi med stöd av Sats 6.1 att

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(z_k(t))\,z_k'(t)\,dt &= \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{d}{dt}(F(z_k(t))\,dt \\ &= F(z_k(\beta_k)) - F(z_k(\alpha_k)), \quad k = 1, \dots, n\,. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Då nu $z_{k+1}(\alpha_{k+1}) = z_k(\beta_k)$, $k = 1, \dots, n-1$, så omskriver vi (6.15) i formen

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)\,dz =& \sum_{k=1}^{n} (F(z_k(\beta_k)) - F(z_k(\alpha_k))) \\ =& (F(z_1(\beta_1)) - F(z_1(\alpha_1))) + (F(z_2(\beta_2)) - F(z_2(\alpha_2))) + \dots \\ &+ (F(z_n(\beta_n)) - F(z_n(\alpha_n))) = F(z_n(\beta_n)) - F(z_1(\alpha_1)) \\ =& F(b_n) - F(a_1) = F(b) - F(a)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Exempel 6.6. Beräkna $\int_{z_1}^{z_2} z\,dz$ längs någon regulär kurva Γ från z_1 till z_2.
Lösning: Funktionen $f(z) = z$ är kontinuerlig i hela $\mathbb{C}$ och har där den primitiva funktionen $F(z) = z^2/2$. Därmed gäller med stöd av Sats 6.2 att

$$\int_{z_1}^{z_2} z\,dz = F(z_2) - F(z_1) = \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2)\,,$$

längs varje regulär kurva från z_1 till z_2.

Sats 6.3. *Antag att f är kontinuerlig i området D och har en primitiv funktion $F(z)$ i D. Då gäller för varje sluten styckevis regulär kurva Γ i D att*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0\,. \tag{6.17}$$

Bevis: För kurvan Γ sammanfaller börjepunkten a med slutpunkten b, $a = b$. Då gäller med stöd av Sats 6.2 att

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a) = 0\,. \quad \square$$

Sats 6.4. *Antag att $f(z)$ är kontinuerlig i området D. Då är följande påståenden ekvivalenta:*
(i) $f(z)$ har en primitiv funktion $F(z)$ i D.
(ii) För varje sluten styckevis regulär kurva Γ i D gäller:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

(iii) Om Γ_1 och Γ_2 är två styckevis reguljära kurvor i D med samma börjepunkt och samma slutpunkt, så gäller

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

(Kurvintegralen är oberoende av vägen).

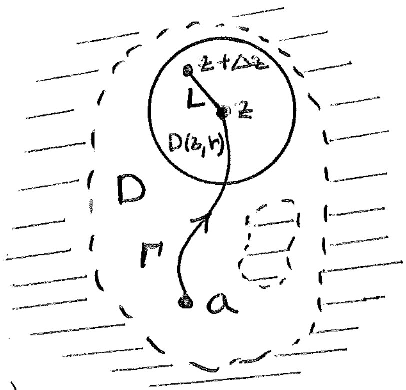
Bevis: Vi har visat att (i) $\Rightarrow$ (ii) (Sats 6.3) och att (i) $\Rightarrow$ (iii) (Sats 6.2). Vi bör alltså visa att (ii) $\Rightarrow$ (iii) och att (iii) $\Rightarrow$ (i).

1. Vi visar först att (ii) $\Rightarrow$ (iii). Antag att (ii) gäller och att Γ_1 och Γ_2 är två styckevis reguljära kurvor i D med samma börjepunkt a och samma slutpunkt b. Definiera den styckevis reguljära kurvan Γ i D genom: $\Gamma = \Gamma_1 + (-\Gamma_2)$. Då är Γ en sluten styckevis regulär kurva i D, varför $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Å andra sidan gäller:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

Alltså gäller $\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$, och vi har visat att (ii) $\Rightarrow$ (iii).

2. Vi skall visa att (iii) $\Rightarrow$ (i). Antag att $\int_{a\Gamma}^{b} f(z)\,dz$ endast beror av punkterna a och b för varje styckevis regulär kurva Γ i D. Då D är sammanhängande kan varje punkt $z \in D$ sammanbindas med a med en styckevis regulär kurva Γ i D. (Se figur).



Tag godtyckligt $z \in D$. Vi definierar $F(z)$ genom

$$F(z) = \int_{a\Gamma}^{z} f(w)\,dw\,.$$

Värdet på $F(z)$ är oberoende av Γ. Vi skall visa att $F'(z) = f(z)$. Eftersom D är en öppen mängd finns en cirkelskiva $D(z,r) \subseteq D$. Välj $\triangle z$ så litet att $z + \triangle z$ tillhör $D(z,r)$. Räta linjen från z till $z + \triangle z$ kallas L. Då gäller:

$$\begin{aligned} F(z+\triangle z) - F(z) &= \int_{a\Gamma+L}^{z+\triangle z} f(w)\,dw - \int_{a\Gamma}^{z} f(w)\,dw \\ &= \int_{a\Gamma}^{z} f(w)\,dw + \int_{zL}^{z+\triangle z} f(w)\,dw - \int_{a\Gamma}^{z} f(w)\,dw \\ &= \int_{zL}^{z+\triangle z} f(w)\,dw \\ &= \int_{zL}^{z+\triangle z} f(z)\,dw + \int_{zL}^{z+\triangle z} (f(w) - f(z))\,dw \\ &= f(z)\,\triangle z + \int_{zL}^{z+\triangle z} (f(w) - f(z))\,dw, \end{aligned}$$

ty med stöd av Sats 6.2 gäller: $\int_{z}^{z+\triangle z} dw = [w]_{z}^{z+\triangle z} = \triangle z$. Då f är kontinuerlig hör till ett godtyckligt valt $\varepsilon > 0$ ett $\delta > 0$, så att för $w \in L$ gäller: $|\triangle z| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon$. För $|\triangle z| < \delta$ gäller det, där den första olikheten erhålls med stöd av (6.10), att

$$\begin{aligned}|F(z+\triangle z)-F(z)-f(z)\,\triangle z| &= \left|\int_{z^L}^{z+\triangle z}(f(w)-f(z))\,dw\right| \\ &\le (\max_{w\in L}|f(w)-f(z)|)\cdot|\triangle z| \\ &< \varepsilon\,|\triangle z|\,.\end{aligned}$$

Division med $|\triangle z|$ där $|\triangle z|<\delta$ ger:

$$\left|\frac{F(z+\triangle z)-F(z)}{\triangle z}-f(z)\right|<\varepsilon.$$

Alltså gäller

$$F'(z)=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{F(z+\triangle z)-F(z)}{\triangle z}=f(z)\,.$$

Därmed har $f(z)$ en primitiv funktion $F(z)$ i hela D. □

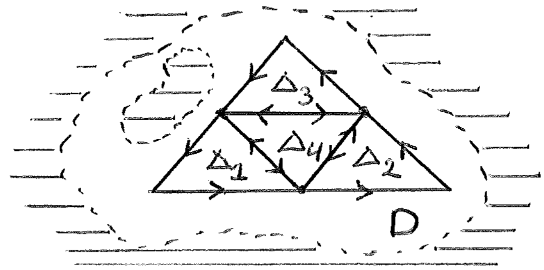
6.3 Cauchys integralsats

I föregående avsnitt visades att integralen av en kontinuerlig funktion är noll längs varje sluten regulär kurva i ett område D om och endast om funktionen har en primitiv funktion i D. Vi visar i detta avsnitt, att om funktionen är **analytisk** i ett **enkelt sammanhängande** område D, så är dess integral noll längs varje sluten styckevis regulär kurva i D. Detta är **Cauchys integralsats**. Vi börjar med att bevisa en hjälpsats.

Sats 6.5. *Antag att $f(z)$ är analytisk i ett område D. Om Γ är en triangel i D sådan att området M innanför Γ också tillhör D, så gäller*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz=0\,. \tag{6.18}$$

Bevis: Vi betecknar $I=\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right|\ge 0$, och visar att $I=0$. Dela upp $\triangle=\gamma\cup M$ i fyra solida trianglar $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ och $\triangle_4$ med ränderna $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ och γ_4. Detta görs genom att sammanbinda mittpunkterna på sidorna av Γ.



Om $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ och γ_4 orienteras positivt gäller

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz\,.$$

Den triangel för vilken $\left|\int_{\gamma_j} f(z)\,dz\right|$ är störst ombetecknas till $\triangle_1$ med randen γ_1 och vi sätter $I_1 = \left|\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right|$. Då gäller $I \leq 4I_1$. Vidare är $\operatorname{diam}(\triangle_1) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\triangle)$ och båglängden$(\gamma_1) = \frac{1}{2}$båglängden(Γ). Om vi upprepar delningsproceduren med triangeln $\triangle_1$ erhålls en triangel $\triangle_2$ med randen γ_2 och $I_2 = \left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right|$. Då gäller $I_1 \leq 4I_2$, och vidare att $\operatorname{diam}(\triangle_2) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\triangle_1)$ och båglängden$(\gamma_2) = \frac{1}{2}$båglängden(γ_1). Då vi upprepar denna procedur erhåller vi en följd av trianglar $\triangle, \triangle_1, \triangle_2, \ldots$ med ränderna $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Då gäller:

(i) $\triangle_{j+1} \subset \triangle_j$ för alla j,
(ii) båglängden$(\gamma_{j+1}) = \frac{1}{2}$båglängden$(\gamma_j) = \ldots = \frac{1}{2^{j+1}}$båglängden$(\Gamma)$,
(iii) $\operatorname{diam}(\triangle_{j+1}) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\triangle_j) = \ldots = \frac{1}{2^{j+1}}\operatorname{diam}(\triangle)$,
(iv) $I \leq 4I_1 \leq 4^2 I_2 \leq \ldots \leq 4^j I_j$.

Eftersom $\triangle_j$ är slutna mängder i D, $\triangle_{j+1} \subset \triangle_j$ för alla j och $\operatorname{diam}(\triangle_j) \to 0$, då $j \to \infty$, så finns det med stöd av Cantors sats (Sats 2.6) en entydigt bestämd punkt $z_0 \in D$ sådan att $z_0 = \cap_{j=1}^{\infty} \triangle_j$. Då f är analytisk i z_0 existerar $f'(z_0)$. Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. Då finns det ett $\delta > 0$ sådant att

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon, \quad \text{då } |z - z_0| < \delta\,.$$

Med andra ord gäller

$$|f(z) - (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))| < \varepsilon\,|z - z_0|, \quad \text{då } |z - z_0| < \delta\,.$$

Eftersom $\operatorname{diam}(\triangle_j) \to 0$, då $j \to \infty$ finns det ett index j_0 sådant att $j > j_0 \Rightarrow \triangle_j$ ligger i cirkelskivan $\{z : |z - z_0| < \delta\}$. Vidare gäller med stöd av Sats 6.3 att $\int_{\gamma_j} dz = 0$ och $\int_{\gamma_j}(z-z_0)\,dz = 0$, ty vi har de primitiva funktionerna $F(z) = z$ respektive $F(z) = (z-z_0)^2/2$. Då gäller för $j > j_0$, där vi använder (6.9) i den första olikheten, att

$$\begin{aligned}
I_j &= \left|\int_{\gamma_j} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\gamma_j} f(z)\,dz - f(z_0)\int_{\gamma_j} dz - f'(z_0)\int_{\gamma_j}(z-z_0)\,dz\right| \\
&= \left|\int_{\gamma_j}(f(z) - (f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)))\,dz\right| \\
&\le \int_{\gamma_j} |f(z) - (f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0))|\,|dz| \\
&< \varepsilon \cdot (\max_{z\in\gamma_j}|z-z_0|) \cdot \text{båglängden}(\gamma_j) \\
&\le \varepsilon \cdot \text{diam}(\triangle_j) \cdot \text{båglängden}(\gamma_j) \\
&= \varepsilon \cdot \frac{1}{2^j}\text{diam}(\triangle) \cdot \frac{1}{2^j}\text{båglängden}(\gamma) \\
&= \varepsilon \cdot \frac{1}{4^j}\text{diam}(\triangle) \cdot \text{båglängden}(\Gamma)
\end{aligned}$$

Med stöd av (iv) erhålls då för $j > j_0$

$$\begin{aligned}
0 \le I \le 4^j\, I_j &\le 4^j(\varepsilon \cdot \frac{1}{4^j}\text{diam}(\triangle) \cdot \text{båglängden}(\Gamma)) \\
&= \varepsilon \cdot \text{diam}(\triangle) \cdot \text{båglängden}(\Gamma)\,.
\end{aligned}$$

Då ovanstående uppskattning gäller för alla $\varepsilon > 0$ får vi att $I = 0$. □

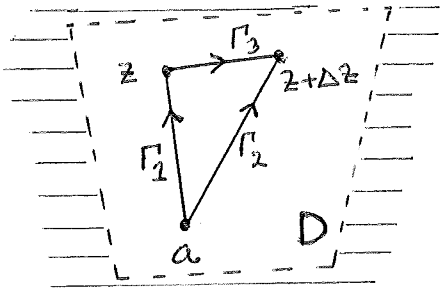
Nu formuleras Cauchys integralsats i sin allmänna form. Beviset utförs för specialfallet då D är ett konvext område. Detta är oftast fallet i tillämpningar.

Sats 6.6. (Cauchys integralsats. *Antag att funktionen $f(z)$ är analytisk i ett enkelt sammanhängande område D. Då är $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ för varje sluten styckevis regulär kurva Γ i D.*

Bevis: (Partiellt bevis för konvext D). Antag att D är ett konvext område. (Vilket medför att D är enkelt sammanhängande). Fixera ett godtyckligt $a \in D$. Välj ett godtyckligt $z \in D$. Definiera

$$F(z) = \int_{a\,\Gamma_1}^{z} f(w)\,dw,$$

där integrationen sker längs sträckan Γ_1 från a till z. Tag en punkt $z + \triangle z \in D$. Låt Γ_2 vara sträckan från a till $z + \triangle z$ och Γ_3 sträckan från z till $z + \triangle z$. Triangeln med hörnpunkterna a, z och $z + \triangle z$ ligger helt i D (ty D är en konvex mängd).



Nu gäller

$$F(z + \triangle z) - F(z) = \int_{\Gamma_2} f(w)\, dw - \int_{\Gamma_1} f(w)\, dw\,. \tag{6.19}$$

Med stöd av Sats 6.5 gäller

$$\int_{\Gamma_2} f(w)\, dw - \int_{\Gamma_3} f(w)\, dw - \int_{\Gamma_1} f(w)\, dw = 0\,. \tag{6.20}$$

Alltså gäller

$$\int_{\Gamma_2} f(w)\, dw - \int_{\Gamma_1} f(w)\, dw = \int_{\Gamma_3} f(w)\, dw\,. \tag{6.21}$$

Då vi kombinerar (6.19) och (6.21) så erhålls

$$F(z + \triangle z) - F(z) = \int_{\Gamma_3} f(w)\, dw = \int_{z}^{z+\triangle z} f(w)\, dw\,.$$

Precis som i del 2 av beviset av Sats 6.4 erhålls nu att $F'(z) = f(z)$. Men då ger Sats 6.4 att $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$ för varje sluten styckevis regulär kurva Γ i D. □

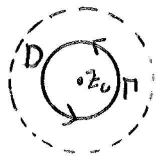
Exempel 6.7. Sats 6.6 behöver inte gälla i ett område som inte är enkelt sammanhängande. Låt exempelvis $D = \{z : |z - z_0| < 2 \text{ och } z \neq z_0\}$. Då är funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

analytisk i D. Låt Γ vara den slutna och reguljära kurvan $\Gamma = \{z : |z - z_0| = 1\}$. Då är

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i,$$

om Γ genomlöps ett varv i positiv riktning. (Se Exempel 6.3).



Anmärkning: Om det område D där $f(z)$ är analytisk inte är enkelt sammanhängande, så gäller Sats 6.6 i varje delområde $D_1 \subset D$ som är enkelt sammanhängande.

Sats 6.7. *Om funktionen $f(z)$ är analytisk på och innanför en styckevis regulär Jordankurva Γ, så gäller*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

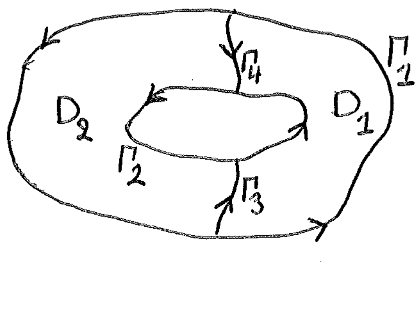
Bevis: Då f är analytisk i varje punkt av Γ, så är $f(z)$ deriverbar i en omgivning av varje sådan punkt. Detta medför att det existerar ett enkelt sammanhängande område D, som innehåller Γ och i vilket f är analytisk. Då gäller med stöd av Sats 6.6 $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$. □

Sats 6.8. *Låt Γ_1 och Γ_2 vara två styckevis reguljära Jordankurvor sådana att Γ_2 ligger innanför Γ_1. Antag att funktionen $f(z)$ är analytisk på Γ_1 och på Γ_2, samt i området D mellan Γ_1 och Γ_2. Då gäller*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\,, \tag{6.22}$$

förutsatt att Γ_1 och Γ_2 genomlöps i samma riktning.

Bevis: Vi förbinder Γ_1 och Γ_2 med två reguljära kurvor Γ_3 och Γ_4 enligt figuren nedan.



Då delas D upp i två enkelt sammanhängande delområden D_1 och D_2. Kalla den "vänstra delen" av Γ_1 för γ_1^v och den "högra delen" av Γ_1 för γ_1^h. Analogt definieras γ_2^v och γ_2^h. Då har vi två Jordankurvor, $\gamma_1^h + \Gamma_4 + (-\gamma_2^h) + (-\Gamma_3)$ och $\gamma_1^v + \Gamma_3 + (-\gamma_2^v) + (-\Gamma_4)$, sådana att f är analytisk på dessa och i området innanför dem (D_1 och D_2). Med stöd av Sats 6.7 gäller det att:

$$\int_{\gamma_1^h} + \int_{\Gamma_4} - \int_{\gamma_2^h} - \int_{\Gamma_3} = 0 \quad \text{och} \quad \int_{\gamma_1^v} + \int_{\Gamma_3} - \int_{\gamma_2^v} - \int_{\Gamma_4} = 0 \,. \tag{6.23}$$

Om vi adderar ihop vänster- och högerled i (6.23) får vi att $\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$. □

Med ett analogt bevis generaliseras Sats 6.8 till:

Sats 6.9. *Låt $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ vara styckevis reguljära Jordankurvor. Antag att $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ligger innanför Γ, men inte innanför varandra. Om $f(z)$ är analytisk på $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ och i området D mellan kurvorna, så gäller:*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz \,, \tag{6.24}$$

förutsatt att alla kurvor genomlöps i samma riktning.