5 Komplexa serier

5.1 Allmänna satser

Betrakta en följd $c_1, c_2, c_3, \ldots$, betecknad $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$, av komplexa tal. Den n:te **partialsumman** S_n definieras genom

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} c_j = c_1 + c_2 + \cdots + c_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{5.1}$$

Om följden $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ har ett gränsvärde S ($\neq \infty$) säger vi att den oändliga serien $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ är konvergent med summan S. Detta betecknas

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j = S\,. \tag{5.2}$$

Om följden $\{S_n\}$ inte har ett gränsvärde är serien $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ divergent.

Termerna i partialsumman S_n kan skrivas $c_j = a_j + i\,b_j$, $j = 1, ..., n$, där $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Då fås

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} c_j = \sum_{j=1}^{n} a_j + i \sum_{j=1}^{n} b_j = \sigma_n + i\,\tau_n\,, \tag{5.3}$$

där σ_n och τ_n är de n:te partialsummorna av de reella serierna $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ respektive $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$. Beteckna $S = \sigma + i\,\tau$. Med stöd av Sats 2.2 gäller:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \sigma + i\,\tau \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \text{ och } \lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau\right).$$

Med andra ord har vi:

Sats 5.1. *Serien $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ konvergerar om och endast om de reella serierna $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ och $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ båda konvergerar. Härvid gäller:*

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} c_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j + i \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sigma + i\,\tau\,. \tag{5.4}$$

Anmärkning: Studiet av konvergensen för en komplex serie kan således överföras på studiet av konvergensen för två reella serier.

Sats 5.2. *Om serien* $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ *konvergerar, så är* $\lim_{j\to\infty} c_j = 0$.

Bevis: Sätt $c_j = a_j + i\,b_j$. Då har vi att $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ konvergerar medför att de reella serierna $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ och $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ båda konvergerar, vilket i sin tur medför att $a_j \to 0$ och $b_j \to 0$ då $j \to \infty$, och därmed har vi att $c_j \to 0$ då $j \to \infty$. □

Anmärkning: Om serien $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ är konvergent så gäller med stöd av föregående sats att det för $\varepsilon = 1$ existerar ett heltal N så att $|c_j| < 1$ såsnart $j > N$. Därmed kan vi hitta en konstant $K > 0$ så att $|c_j| < K$ för alla j.

Exempel 5.1. Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{2k}}{2^k}$ är divergent.
Lösning: Vi har att

$$\frac{1}{2^k}(1+i)^{2k} = \Big(\frac{(1+i)^2}{2}\Big)^k = \Big(\frac{2i}{2}\Big)^k = i^k \not\to 0, \text{ då } k \to \infty\,.$$

Definition 5.1. Den komplexa serien $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ är absolut konvergent om serien $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|$ är konvergent.

För positiva reella serier med termerna uppfyllande $0 \le x_j \le y_j$, $j = 1, 2, \ldots$, gäller: $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ konvergent $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} x_j$ konvergent. (Majorantprincipen).

Sats 5.3. *Serien* $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$, *där* $c_j = a_j + i\,b_j$, *är absolut konvergent om och endast om både* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *och* $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *är absolut konvergenta reella serier.*

Bevis: 1. Antag att $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ är absolut konvergent. Eftersom $|a_j| \le |c_j|$ och $|b_j| \le |c_j|$ för alla j, så är även serierna $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ och $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ absolut konvergenta.

2. Antag att $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ och $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ är absolut konvergenta. Då $|c_j| \le |a_j| + |b_j|$ för alla j, och serien $\sum_{j=1}^{\infty}(|a_j| + |b_j|)$ är konvergent, så är även serien $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|$ konvergent. Alltså är serien $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ absolut konvergent. □

Exempel 5.2. En serie som är konvergent behöver inte vara absolut konvergent. Serien

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{(1+i)}{j} = (1+i) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j}$$

är konvergent, ty den reella serien $-1+1/2-1/3+1/4-\ldots$ har alternerande termer vilkas belopp är strängt avtagande mot 0. Däremot är serien

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|(-1)^j\,\frac{(1+i)}{j}\right| = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{j}$$

divergent.

För en reell serie gäller att om den är absolut konvergent så är den även konvergent. Med stöd av detta fås:

Sats 5.4. *Om en komplex serie $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$, $c_j = a_j + i\,b_j$, är absolut konvergent så är den även konvergent. Vidare gäller:*

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} c_j\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|\,. \tag{5.5}$$

Bevis: Av antagandet och Sats 5.3 följer att serierna $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|$ och $\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|$ är konvergenta. Då är även de reella serierna $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ och $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergenta. Med stöd av Sats 5.1 är då serien $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ konvergent. Beteckna $S := \sum_{j=1}^{\infty}|c_j|$. Den generaliserade triangelolikheten ger att för varje n gäller $|\sum_{j=1}^{n} c_j| \le \sum_{j=1}^{n}|c_j| \le S$. Om vi låter $n \to \infty$ erhålls (5.5). □

Exempel 5.3. Antag att $|c| < 1$, där c är ett komplext tal. Eftersom

$$(1-c)(1+c+c^2+\ldots+c^n) = 1-c^{n+1},$$

erhåller vi

$$1+c+\ldots+c^n = \frac{1-c^{n+1}}{1-c}\,.$$

Då $|c| < 1 \Rightarrow c^{n+1} \to 0$, då $n \to \infty$, får vi att

$$\sum_{j=0}^{\infty} c^j = \frac{1}{1-c}, \quad \text{då } |c| < 1\,. \tag{5.6}$$

Detta är den **geometriska serien med rationen** c. Om $|c| \ge 1$ så divergerar serien, ty då gäller $c^j \not\to 0$ då $j \to \infty$.

Exempel 5.4. Undersök om serien $\sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{1+2i}{3}\right)^j$ är konvergent

Lösning: Kvottestet för serien $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$: Serien är absolut konvergent om $\lim_{j\to\infty} \frac{|c_{j+1}|}{|c_j|} = d$ och $0 \le d < 1$. Serien är divergent om $d > 1$ och konvergensen är obestämbar om $d = 1$.

(1) $d < 1$. Välj $\varepsilon > 0$ och J så att $\frac{|c_{j+1}|}{|c_j|} < d + \varepsilon < 1$ för $j \ge J$. Då är $|c_{j+1}| < |c_j|(d+\varepsilon)$ för $j \ge J$. För $k > J$ gäller $|c_k| < |c_{k-1}|\,(d+\varepsilon) < |c_{k-2}|\,(d+\varepsilon)^2 < \ldots < |c_J|\,(d+\varepsilon)^{k-J}$. Då har vi att $|d+\varepsilon| < 1 \Rightarrow \sum_{k=J+1}^{\infty} |c_J|\,(d+\varepsilon)^{k-J} = |c_J|\,(d+\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}(d+\varepsilon)^j$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=J+1}^{\infty}|c_k|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} c_j$ absolut konvergent.
(2) Om $d > 1$ så finns ett J så att $|c_{j+1}|/|c_j| > 1$ för $j \ge J$, vilket medför att för $k > J$ gäller $|c_k| > |c_{k-1}| > \ldots > |c_J|$, vilket i sin tur medför att $c_j \not\to 0$ då $j \to \infty$. Serien är divergent.
(3) För $c_j = \frac{1}{j}$ och $c_j = \frac{(-1)^j}{j}$ ger kvottestet $d = 1$. Den första serien är divergent och den andra är konvergent.

Vi undersöker $|c_j| = \left|j\left(\frac{1+2i}{3}\right)^j\right| = j\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^j$.

$$\frac{|c_{j+1}|}{|c_j|} = \frac{j+1}{j}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} \to \frac{\sqrt{5}}{3} < 1, \text{ då } j \to \infty,$$

och då är serien $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ absolut konvergent och därmed även konvergent enligt Sats 5.4.

5.2 Likformig konvergens

Låt $f_1(z), f_2(z), \ldots = \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av funktioner som är definierade på en mängd $D \subseteq \mathbb{C}$. Antag att följden konvergerar (punktvis) i D mot en funktion $f(z)$. Alltså för varje $\varepsilon > 0$ och $z \in D$ existerar ett heltal $N (= N(z,\varepsilon))$ sådant att $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ såsnart $n \ge N$. **Här är gränsindexet N beroende av både ε och z.** Vid likformig konvergens beror gränsindexet enbart av ε.

Definition 5.2. Följden $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar *likformigt* mot funktionen $f(z)$ på mängden D om för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal N_ε sådant att

$$n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \textit{ för alla } z \in D. \tag{5.7}$$

Betrakta nu **funktionsserien** $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ och antag att den konvergerar mot $S(z)$ för varje $z \in D$. Partialsummorna $S_n(z)$ för funktionsserien ges av $S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Definition 5.3. Funktionsserien $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ konvergerar likformigt mot $S(z)$ på D, om följden av partialsummor $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt mot $S(z)$ på D.

Likformiga konvergensen för en funktionsserie kan säkerställas med hjälp av **Weierstrass M-test:**

Sats 5.5. *Antag att $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ är en konvergent serie med reella icke-negativa termer. Antag att för alla $z \in D$ och alla index $j > J$ gäller att $|f_j(z)| \leq M_j$. Då är funktionsserien $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ likformigt konvergent på D.*

Bevis: Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. Beteckna $s_n = \sum_{j=1}^{n} M_j$ och $S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)$. Eftersom följden $\{s_n\}$ är konvergent är den en Cauchy-följd. Vi kan välja $N_\varepsilon > J$ så att för $m > n > N_\varepsilon$ gäller

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{j=n+1}^{m} M_j \right| = \sum_{j=n+1}^{m} M_j < \varepsilon . \tag{5.8}$$

Men då är även $\{S_n(z)\}$ en Cauchy-följd för varje $z \in D$, ty för $m > n > N_\varepsilon > J$ gäller med stöd av (5.8) att

$$|S_m(z) - S_n(z)| = \left| \sum_{j=n+1}^{m} f_j(z) \right| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |f_j(z)| \leq \sum_{j=n+1}^{m} M_j < \varepsilon . \tag{5.9}$$

Därmed är $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ konvergent för varje $z \in D$, och serien konvergerar i D mot en funktion $S(z)$. Om vi låter $m \to \infty$ i (5.9) ($S_m(z) \to S(z)$) erhålls:

$$|S(z) - S_n(z)| \leq \varepsilon \text{ för alla } z \in D \text{ då } n > N_\varepsilon .$$

Alltså konvergerar $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ likformigt mot $S(z)$ på D. □

Sats 5.6. *Låt $\{f_n(z)\}$ vara en följd av kontinuerliga funktioner definierade i mängden D, och antag att följden konvergerar likformigt mot $f(z)$ på D. Då är $f(z)$ kontinuerlig på D.*

Bevis: Tag $\varepsilon > 0$ och välj en godtycklig punkt $z_0 \in D$. På grund av att följden $\{f_n(z)\}$ är likformigt konvergent kan vi välja N så stort att $|f(z) - f_N(z)| < \varepsilon/3$ för alla $z \in D$. Eftersom f_N är kontinuerlig i z_0 finns det ett $\delta > 0$ sådant att $(z \in D \wedge |z_0 - z| < \delta) \Rightarrow |f_N(z_0) - f_N(z)| < \varepsilon/3$. Men då gäller för $|z_0 - z| < \delta$ att

$$\begin{aligned}|f(z_0) - f(z)| &= |f(z_0) - f_N(z_0) + f_N(z_0) - f_N(z) + f_N(z) - f(z)| \\ &\leq |f(z_0) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f_N(z)| + |f_N(z) - f(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .\end{aligned}$$

Därmed är $f(z)$ kontinuerlig i varje punkt $z_0 \in D$. □

Anmärkning: Om den i mängden D likformigt konvergenta funktionsserien $S(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ har kontinuerliga termer $f_j(z)$ i D, så är även partialsummorna $S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)$ kontinuerliga i D. Med stöd av Sats 5.6 är då $S(z)$ kontinuerlig i D.

5.3 Potensserier

Definition 5.4. En funktionsserie av formen $\sum_{j=0}^{\infty} c_j\,(z - z_0)^j$, där c_j och z_0 är komplexa konstanter, kallas en *potensserie*. Konstanterna c_j är koefficienterna för potensserien.

Vi skall i resten av detta kapitel besvara frågorna: För vilka z konvergerar potensserien? När konvergerar den likformigt? Är gränsfunktionen kontinuerlig? Är gränsfunktionen analytisk?

Sats 5.7. *Om en potensserie konvergerar för* $z = z_1 (\neq z_0)$, *så konvergerar den absolut för varje* z *med* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Bevis: Eftersom serien $\sum_{j=0}^{\infty} c_j\,(z_1 - z_0)^j$ konvergerar är seriens termer begränsade, (anmärkningen efter Sats 5.2), och det finns en positiv konstant M sådan att $|c_j\,(z_1 - z_0)^j| \leq M$ för alla j. Med beaktande av att $|c_j| \leq M/|z_1 - z_0|^j$ får vi:

$$|c_j\,(z - z_0)^j| = |c_j||z - z_0|^j \leq M\left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}\right)^j . \tag{5.10}$$

Enligt antagandet är $\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} < 1$. Därmed konvergerar den geometriska serien $\sum_{j=0}^{\infty} M\left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^j$. Majorantprincipen och (5.10) ger då att potensserien $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-z_0)^j$ är absolut konvergent för varje z med $|z-z_0| < |z_1-z_0|$.
□

Definition 5.5. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en reell talföljd. Då definieras limes superior och limes inferior genom:

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}\Big)\,, \tag{5.11}$$

$$\liminf a_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}\Big)\,. \tag{5.12}$$

Vi gör nu en uppräkning av egenskaperna för lim sup och lim inf. För bevisen hänvisas till en kurs i reell analys.

För en obegränsad reell talföljd $\{a_n\}$ gäller:

$$\begin{aligned}
\limsup a_n = +\infty &\Leftrightarrow \{a_n\} \text{ är obegränsad uppåt,}\\
\limsup a_n = -\infty &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,\\
\liminf a_n = -\infty &\Leftrightarrow \{a_n\} \text{ är obegränsad nedåt,}\\
\liminf a_n = +\infty &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\,.
\end{aligned}$$

Då $\limsup a_n$ och $\liminf a_n$ är ändliga karakteriseras de av följande sats.

Sats 5.8. *(1)* $\limsup a_n = a \in \mathbb{R}$ *om och endast om*

a) $\forall \varepsilon > 0\, \exists N : n > N \Rightarrow a_n < a + \varepsilon$,

b) För varje $\varepsilon > 0$ och varje heltal N finns ett $n > N$, så att $a_n > a - \varepsilon$.

(2) $\liminf a_n = a \in \mathbb{R}$ *om och endast om*

a) $\forall \varepsilon > 0\, \exists N : n > N \Rightarrow a_n > a - \varepsilon$,

b) För varje $\varepsilon > 0$ och varje heltal N finns ett $n > N$, så att $a_n < a + \varepsilon$.

Anmärkning: Sats 5.8 medför då att $a = \limsup a_n \Leftrightarrow$ för varje $\epsilon > 0$ finns ett ändligt antal $a_n > a + \varepsilon$ och ett oändligt antal $a_n > a - \varepsilon$.
$a = \liminf a_n \Leftrightarrow$ för varje $\epsilon > 0$ finns ett ändligt antal $a_n < a - \varepsilon$ och ett oändligt antal $a_n < a + \varepsilon$.

Definition 5.6. Talet α är en *hopningspunkt* för den reella talföljden $\{a_n\}$, om för varje $\varepsilon > 0$ och varje positivt heltal N alltid finns något index $n \geq N$ med $|x_n - \alpha| < \varepsilon$.

Varje ε-omgivning av en hopningspunkt innehåller oändligt många tal ur följden. Man kan visa att det bland alla hopningspunkter för en given talföljd $\{a_n\}$ alltid finns en största och en minsta hopningspunkt. ($+\infty$ största om $\{a_n\}$ obegränsad uppåt och $-\infty$ minsta om $\{a_n\}$ obegränsad nedåt). Om talföljden $\{a_n\}$ är konvergent har den endast en hopningspunkt. Nu kan $\limsup a_n$ och $\liminf a_n$ kopplas till hopningspunkterna för $\{a_n\}$.

Sats 5.9. $\limsup a_n$ *är den största hopningspunkten för följden* $\{a_n\}$ *och* $\liminf a_n$ *är den minsta hopningspunkten för följden. Om* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *existerar gäller* $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Anmärkning: Av Sats 5.9 följer att $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

Exempel 5.5. Bestäm $\limsup a_n$ och $\liminf a_n$ för $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots$.
Lösning: Vi har att

$$b_n = a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \to \mathrm{e}, \text{ då } n \to \infty,$$
$$c_n = a_{2n+1} = \left(1 + \frac{-1}{2n+1}\right)^{2n+1} \to \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}, \text{ då } n \to \infty\,.$$

Därmed har vi att $\limsup a_n = \mathrm{e}$ och $\liminf a_n = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Vi bevisar nu en användbar sats för bestämning av lim sup.

Sats 5.10. *Antag att* $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha > 0$ *och* $\limsup b_n = \beta$. *Då gäller*

$$\limsup(a_n b_n) = \alpha \cdot \beta\,. \tag{5.13}$$

Bevis: Eftersom $\limsup b_n = \beta$ kan vi hitta en delföljd $\{b_{n_k}\}$ av $\{b_n\}$, sådan att $b_{n_k} \to \beta$, då $k \to \infty$. För delföljden $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$ av $\{a_n b_n\}$ gäller att $a_{n_k} b_{n_k} \to \alpha\beta$, då $k \to \infty$. För en godtycklig delföljd $\{a_{n_l} b_{n_l}\}$ av $\{a_n b_n\}$ sådan att $a_{n_l} b_{n_l} \to \gamma$, då $l \to \infty$ gäller : $b_{n_l} \to \frac{\gamma}{\alpha}$, då $l \to \infty$. $\limsup b_n = \beta \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} \leq \beta \Rightarrow \gamma \leq \alpha\beta$. Alltså ges den största hopningspunkten för $\{a_n b_n\}$ av $\alpha\beta$. Därmed är $\limsup(a_n b_n) = \alpha\beta$. $\square$

Anmärkning: En helt analog sats gäller för $\liminf(a_n b_n)$.

Sats 5.11. *Vi betraktar potensserien*

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j\,(z-z_0)^j, \tag{5.14}$$

och definierar ett tal R, $0 \le R \le +\infty$, *kallat konvergensradien för potensserien, genom formeln*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}\,. \tag{5.15}$$

Då gäller:
(1) *Potensserien är absolut konvergent för* $|z-z_0| < R$.
(2) *Potensserien konvergerar likformigt i varje cirkelskiva av formen* $|z-z_0| \le R' < R$.
(3) *Potensserien divergerar för* $|z-z_0| > R$.

bevis: Vi behandlar först fallen (1) och (2). Om $R = 0$ har vi inget att bevisa. Antag att $R > 0$. Välj K så att

$$\frac{1}{R} < K < \frac{1}{R'}\,.$$

Då gäller $R > 1/K \Rightarrow K > \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$. Alltså finns det ett ändligt antal c_j med $\sqrt[j]{|c_j|} \ge K$. (Se anmärkningen efter Sats 5.8). För $j > J$ gäller det att $\sqrt[j]{|c_j|} < K$. För alla z i cirkelskivan $|z-z_0| \le R'$ gäller därmed för $j > J$ att

$$|c_j(z-z_0)^j| = (\sqrt[j]{|c_j|}\,|z-z_0|)^j < (K\,R')^j\,. \tag{5.16}$$

Eftersom $K\,R' < 1$ konvergerar $\sum_{j=J+1}^{\infty}(K\,R')^j$ och därmed konvergerar potensserien (5.14) absolut i $|z-z_0| \le R'$. Då konvergerar potensserien även absolut i $|z-z_0| < R$, och fallet (1) är bevisat. Om vi sätter $M_j = 1$ för $j = 0, 1, \ldots, J$ och $M_j = (K\,R')^j$ för $j = J+1, J+2, \ldots$, så konvergerar $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ och $|c_j(z-z_0)^j| \le M_j$ för alla $j > J$ och alla z i cirkelskivan $|z-z_0| \le R'$. Med stöd av Weierstrass M-test, Sats 5.5, konvergerar då potensserien likformigt i cirkelskivan $|z-z_0| \le R'$. Därmed är påståendet (2) bevisat.

För att bevisa påståendet (3) väljer vi z så att $|z-z_0| > R$ och K sådant att

$$\frac{1}{|z-z_0|} < K < \frac{1}{R}\,. \quad (\frac{1}{R} = +\infty \text{ om } R = 0)$$

Då gäller $R < 1/K \Rightarrow K < \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$. Alltså finns det oändligt många koefficienter c_j sådana att $\sqrt[j]{|c_j|} > K$. För sådana c_j gäller

$$|c_j(z-z_0)^j| = (\sqrt[j]{|c_j|}|z-z_0|)^j > (K|z-z_0|)^j > 1\,.$$

Men då gäller inte att $c_j(z-z_0)^j \to 0$ då $j \to \infty$, och potensserien är därmed divergent. □

Anmärkning 1: För en potensserie gäller då ett av tre alternativ: 1) Serien konvergerar enbart för $z = z_0$ ($R = 0$), 2) serien konvergerar för alla $z \in \mathbf{C}$ ($R = +\infty$) eller 3) serien konvergerar i en öppen cirkelskiva $|z - z_0| < R$ och eventuellt i punkter på cirkeln $|z - z_0| = R$.

Anmärkning 2: Den funktion $S(z)$ som potensserien konvergerar mot i $|z - z_0| < R$ är kontinuerlig, ty givet godtyckligt z i $|z - z_0| < R$ finns det ett $R' < R$ så att z ligger i $|z - z_0| \leq R'$. I denna slutna cirkelskiva är potensserien likformigt konvergent och partialsummorna är kontinuerliga funktioner. Med stöd av Sats 5.13 är då $S(z)$ kontinuerlig i punkten z och därmed i hela $|z - z_0| < R$.

Exempel 5.6. Utveckla funktionen $S(z) = \frac{z}{z^2-4}$ i potensserie kring punkten $z_0 = 0$.

Lösning: Vi har att

$$\begin{aligned}\frac{z}{z^2-4} &= \frac{z}{(z-2)(z+2)} = \frac{1/2}{z-2} + \frac{1/2}{z+2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}\\ &= -\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^j + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(-\frac{z}{2}\Big)^j\\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\Big(-\frac{1}{2}\Big)^j - \Big(\frac{1}{2}\Big)^j\Big)\cdot z^j = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{\infty} c_j\, z^j\,.\end{aligned}$$

Då har vi att $c_{2j} = 0 \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \sqrt[2j]{|c_{2j}|} = 0$. Vidare är $c_{2j+1} = -2(\frac{1}{2})^{2j+1}$ så vi får

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[2j+1]{|c_{2j+1}|} = \lim_{j\to\infty} \sqrt[2j+1]{2\,(\frac{1}{2})^{2j+1}} = \lim_{j\to\infty} \sqrt[2j+1]{2}\cdot\frac{1}{2} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Därmed har vi att $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{2}$ vilket betyder att konvergensradien är $R = 2$. Alltså erhåller vi utvecklingen

$$\frac{z}{z^2-4} = -\frac{z}{4} - \frac{z^3}{16} - \frac{z^5}{64} - \frac{z^7}{256} - \ldots \quad \text{för } |z| < 2\,.$$

5.4 Derivator av potensserier

Om vi i potensserien (5.14) substituerar $z_1 = z - z_0$ så erhåller vi en potensserie av formen $\sum_{j=0}^{\infty} c_j z_1^j$. Vi kan utan att förlora i allmängiltighet inskränka behandlingen till potensserier av formen

$$S(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j . \tag{5.17}$$

Antag att potensserien (5.17) har konvergensradien $R > 0$.

Sats 5.12. *Den termvis deriverade potensserien*

$$S_1(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j\, c_j z^{j-1} \tag{5.18}$$

har samma konvergensradie $R_1 = R$ som serien (5.17).

Bevis: Eftersom $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{j} = 1 > 0$ erhålls med stöd av Sats 5.10 att

$$\begin{aligned} \limsup \sqrt[n]{|n\, c_n|} &= \limsup(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|c_n|}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \cdot \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{R} . \end{aligned}$$

Konvergensradien R_1 för serien (5.18) är då $R_1 = 1/(1/R) = R$. □

Anmärkning: Genom upprepad användning av Sats 5.24 får vi att serierna

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) z^{j-2}, \quad \sum_{j=3}^{\infty} j(j-1)(j-2) z^{j-3}, \; \ldots$$

alla har samma konvergensradie R som serien (5.17).

Sats 5.13. *Låt $S(z)$ och $S_1(z)$ vara givna av (5.17) respektive (5.18). Då gäller för $|z| < R$ att $S'(z) = S_1(z)$. (Den termvis deriverade seriens summa $=$ derivatan av den givna seriens summa).*

Bevis: Välj godtyckligt z sådant att $|z| < R$. Välj $\delta = (R - |z|)/2$ och antag att $|h| < \delta$. Då gäller $|z+h| < R$ och

$$S(z+h) - S(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j((z+h)^j - z^j) = c_1 h + \sum_{j=2}^{\infty} c_j((z+h)^j - z^j)\,.$$

Vidare erhålls

$$\frac{S(z+h)-S(z)}{h} - S_1(z) = \sum_{j=2}^{\infty} c_j \left(\frac{(z+h)^j - z^j}{h} - jz^{j-1} \right). \qquad (5.19)$$

Med stöd av binomialteoremet gäller

$$\begin{aligned}
\frac{(z+h)^j - z^j}{h} - jz^{j-1} &= \frac{z^j + \binom{j}{1} z^{j-1}h^1 + \ldots + \binom{j}{j} h^j - z^j}{h} - jz^{j-1} \\
&= \sum_{k=2}^{j} \binom{j}{k} z^{j-k} h^{k-1}\,.
\end{aligned}$$

Då uppskattar vi beloppet

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(z+h)^j - z^j}{h} - jz^{j-1} \right| &\le \sum_{k=2}^{j} \binom{j}{k} |z|^{j-k} |h|^{k-1} \\
&\le |h| \sum_{k=2}^{j} \binom{j}{k} (R - 2\delta)^{j-k} \delta^{k-2} \\
&= \frac{|h|}{\delta^2} \sum_{k=2}^{j} \binom{j}{k} (R-2\delta)^{j-k} \delta^k \\
&< \frac{|h|}{\delta^2} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (R-2\delta)^{j-k} \delta^k = \frac{|h|}{\delta^2} ((R-2\delta)+\delta)^j \\
&= \frac{|h|}{\delta^2} (R-\delta)^j\,.
\end{aligned}$$

Med stöd av (5.19) får vi då att

$$\left| \frac{S(z+h)-S(z)}{h} - S_1(z) \right| \le \frac{|h|}{\delta^2} \sum_{j=2}^{\infty} |c_j| (R-\delta)^j\,. \qquad (5.20)$$

Högra ledet i (5.20) går mot noll då $h \to 0$. Alltså är $S'(z) = S_1(z)$. □

Anmärkning: Genom upprepad användning av Sats 5.24 och Sats 5.13 erhåller vi följande teorem som en sammanfattning av undersökningarna i detta avsnitt.

Sats 5.14. *Låt $S(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$ med konvergensradien $R > 0$. Då är $S(z)$ analytisk i $|z - z_0| < R$. Vidare har $S(z)$ derivator av alla ordningar i $|z - z_0| < R$, som erhålls genom termvis derivering av serien. Alltså:*

$$S^{(k)}(z) = \sum_{j=k}^{\infty} j(j-1) \cdot \ldots \cdot (j-k+1) c_j (z - z_0)^{j-k}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5.21}$$

Vi avslutar detta kapitel med tre viktiga potensserier.

Exempel 5.7. Betrakta potensserien $S(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$. Serien har konvergensradien $R = +\infty$ (övningsuppgift). Alltså är $S(z)$ med stöd av Sats 5.14 analytisk i hela $\mathbb{C}$ (en hel funktion), och $S'(z)$ ges av

$$S'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{z^{j-1}}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{(j-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = S(z),$$

för alla $z \in \mathbb{C}$. Nu gäller för alla $z \in \mathbb{C}$ att

$$(\mathrm{e}^{-z} S(z))' = -\mathrm{e}^{-z} S(z) + \mathrm{e}^{-z} S'(z) = 0,$$

ty $S(z) = S'(z)$. Eftersom $\mathrm{e}^{-z} S(z)$ är analytisk i hela $\mathbb{C}$ gäller $\mathrm{e}^{-z} S(z) = k$ för någon konstant k och alla $z \in \mathbb{C}$. Men då $1 = \mathrm{e}^{-0} S(0) = k$, fås att $S(z) = \mathrm{e}^z$ i $\mathbb{C}$, och vi har att

$$\mathrm{e}^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \quad \text{för alla } z \in \mathbb{C}. \tag{5.22}$$

Exempel 5.8. För $\sin z$ och $\cos z$ erhålls då potensserierna

$$\cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-iz)^j}{j!}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!}, \tag{5.23}$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-iz)^j}{j!}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}, \tag{5.24}$$

där serierna (5.23) och (5.24) konvergerar absolut i hela $\mathbb{C}$.