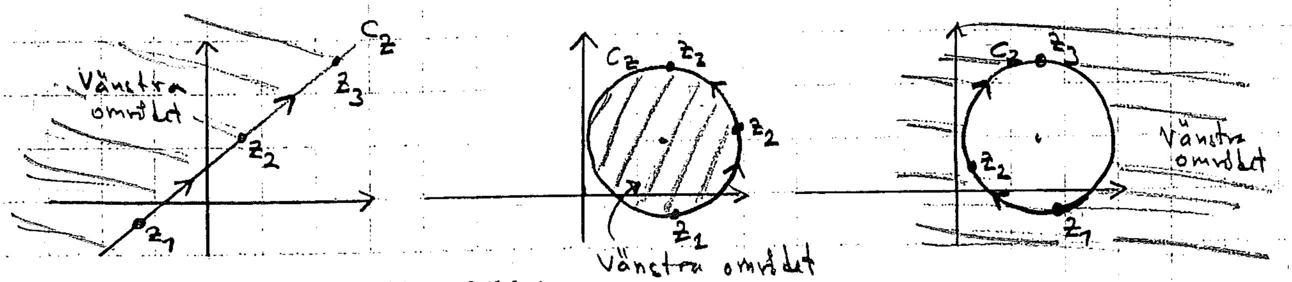
4 Möbiustransformationer

4.1 Elementära transformationer

Vi inleder behandlingen med att studera fem elementära avbildningar. Varje Möbiustransformation kan sammansättas av dessa. Först definieras vad som avses med "cirklar" i z-planet.

Definition 4.1. Låt $C(z)$ beteckna mängden av alla cirklar och linjer i det utvidgade komplexa talplanet, (det utvidgade z-planet). Med "*cirkel*" avses då ett element i $C(z)$, dvs. antingen en cirkel eller en linje.

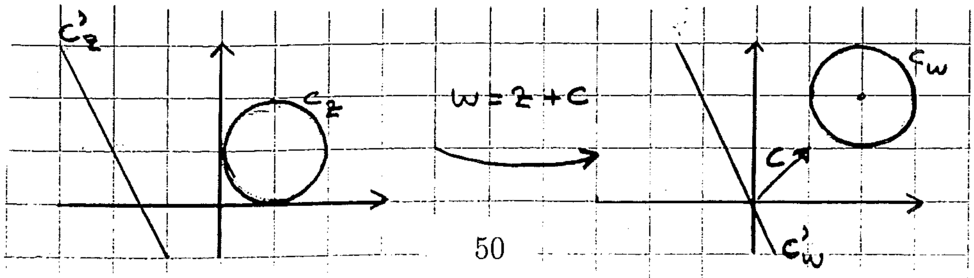
En "cirkel" delar upp z-planet i två områden, antingen i två halvplan eller i området innanför och området utanför en cirkel. Om vi väljer tre punkter z_1, z_2, z_3 på en "cirkel" $C_z \in C(z)$ så att z_2 ligger mellan z_1 och z_3, så definierar delkurvan av C_z som börjar i z_1 och slutar i z_3 och genomlöper z_2, en **genomloppsriktning**, eller **orientering**, av C_z. Vi kan då definiera **området till vänster om** C_z.



I. Translation. En avbildning

$$w = S(z) = z + c, \quad c \in \mathbb{C}, \tag{4.1}$$

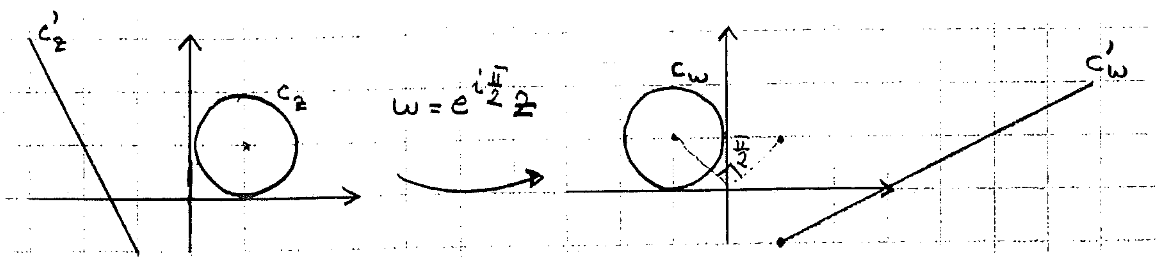
kallas en **translation**. Varje punkt i z-planet förskjuts med en vektor c. Avbildningen är bijektiv, och varje geometrisk figur i z-planet avbildas på en kongruent geometrisk figur i w-planet. Speciellt gäller: **"cirklar" i z-planet avbildas på "cirklar" i** w-planet.



II. Rotation. En avbildning

$$w = S(z) = e^{i\theta} z, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\,, \tag{4.2}$$

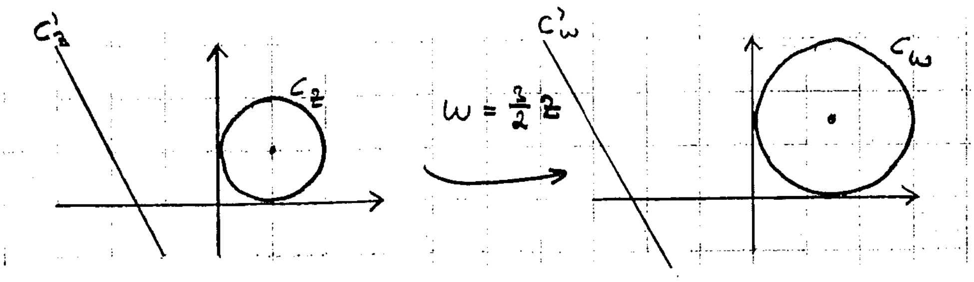
roterar varje punkt i z-planet vinkeln θ runt origo. Avbildningen är bijektiv. Varje geometrisk figur i z-planet avbildas på en kongruent geometrisk figur i w-planet. Speciellt gäller: **"cirklar" i z-planet avbildas på "cirklar" i w-planet.**



III. Dilatation. En avbildning

$$w = S(z) = r\,z, \quad r \in \mathbb{R},\, r > 0\,, \tag{4.3}$$

kallas en **dilatation**. Avbildningen är bijektiv. Varje geometrisk figur i z-planet avbildas på en kongruent förstorad ($r > 1$) eller förminskad ($r < 1$) geometrisk figur i w-planet. Speciellt gäller: **"cirklar" i z-planet avbildas på "cirklar" i w-planet.**

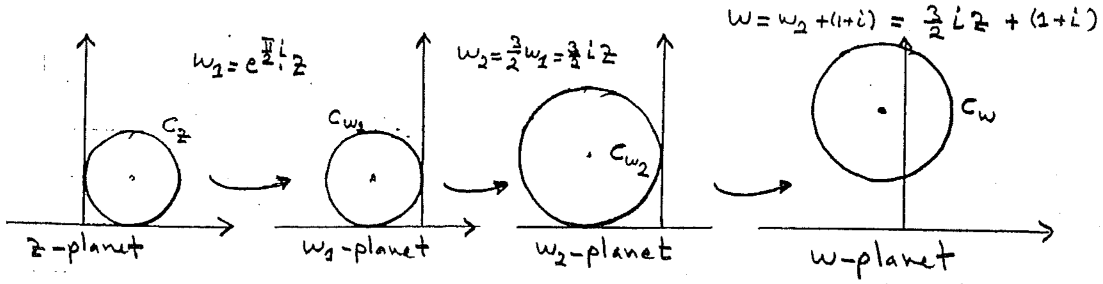


Vidare gäller: $|w_1 - w_2| = |S(z_1) - S(z_2)| = |r\,z_1 - r\,z_2| = r\,|z_1 - z_2|$. Varje avstånd förstoras (förminskas) med faktorn r.

IV. Linjär transformation. En avbildning

$$w = S(z) = a\,z + b, \quad a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{C}\,, \tag{4.4}$$

är en **linjär transformation**. Observera att om $b \neq 0$ så gäller $S(z_1 + z_2) \neq S(z_1) + S(z_2)$. (Begreppet linjär transformation avviker här från det man i andra sammanhang brukar avse med begreppet). **En linjär transformation är uppbyggd av en rotation, en dilatation och en translation.** Om $a = r\,e^{i\theta}$ har vi: $w_1 = e^{i\theta}\,z$, och $w_2 = r\,w_1 = r\,e^{i\theta}\,z$, samt slutligen $w = w_2 + b = a\,z + b$. På basen av de tidigare utredningarna I,II och III fås då att avbildningen $S(z) = a\,z + b$ är bijektiv och att geometriska figurer i z-planet avbildas på kongruenta geometriska figurer i w-planet. Speciellt: **"cirklar" i z-planet avbildas på "cirklar"** i w-planet.



Exempel 4.1. Sök en linjär transformation som avbildar $C_z : |z-1| = 1$ på $C_w : |w - 3i/2| = 2$.

Lösning: (Rita figur!) **Steg 1:** Flytta C_z till origo i w_1-planet genom translationen $w_1 = z - 1$. Vi erhåller cirkeln $C_{w_1} : |w_1| = 1$. **Steg 2:** Förstora C_{w_1} med dilatationen $w_2 = 2\,w_1 = 2(z-1)$. Då fås cirkeln $C_{w_2} : |w_2| = 2$, i w_2-planet. **Steg 3:** Flytta C_{w_2} med translationen $w = w_2 + 3i/2 = 2z - 2 + 3i/2$, varvid vi erhåller cirkeln $C_w : |w - 3i/2| = 2$ i w-planet. Den sökta linjära transformationen är $w = S(z) = 2z - 2 + 3i/2$.

V. Inversion. Avbildningen

$$w = S(z) = \frac{1}{z} \tag{4.5}$$

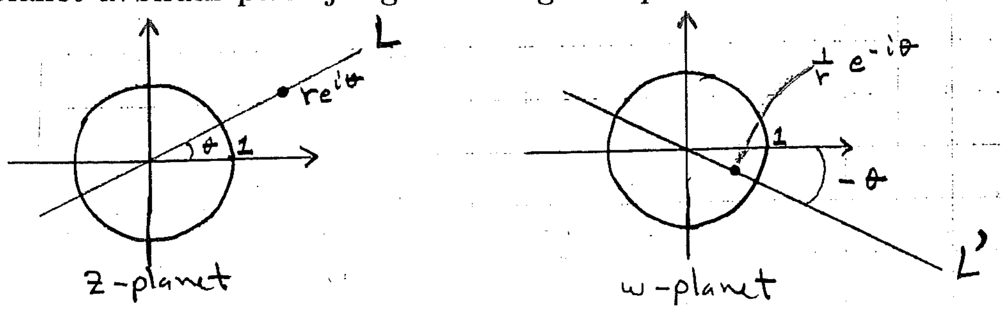
är en **inversion**. Inversionen är en bijektiv avbildning från det utvidgade z-planet till det utvidgade w-planet. Punkten $z = 0$ avbildas på $w = \infty$ och

$z = \infty$ på $w = 0$. Vi skall undersöka hur "cirklar" i det utvidgade z-planet avbildas av $S(z)$. Punkten $z = \infty$ betraktas tillhörande varje linje i $C(z)$.

a) Linjer genom origo. Låt $z_1 = \mathrm{e}^{i\theta}$ vara skärningspunkten mellan linjen L genom origo och enhetscirkeln i z-planet. Linjen L kan parameterframställas genom $z(t) = t\,\mathrm{e}^{i\theta}$, $-\infty < t < \infty$. Då gäller:

$$S(z(t)) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-i\theta}.$$

Linjen L avbildas på linjen L' i w-planet med parameterframställningen $w(t) = \mathrm{e}^{-i\theta}/t$, $-\infty < t < \infty$. Vi ser att $z = 0$ på L avbildas på $w = \infty$ på L', och $z = \infty$ på L avbildas på $w = 0$ på L'. **Linjer genom origo i z-planet avbildas på linjer genom origo i w-planet.**



b) Linjer som inte genomlöper origo. Låt L vara en linje som inte går igenom origo i z-planet. Ekvationen för L ges då av:

$$A\,x + B\,y = C, \quad C \neq 0, \tag{4.6}$$

där A, B, C är reella. Beteckna $w = u + i\,v$ och $z = x + i\,y$.

$$x + i\,y = z = \frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{u - i\,v}{u^2 + v^2}. \tag{4.7}$$

Alltså gäller:

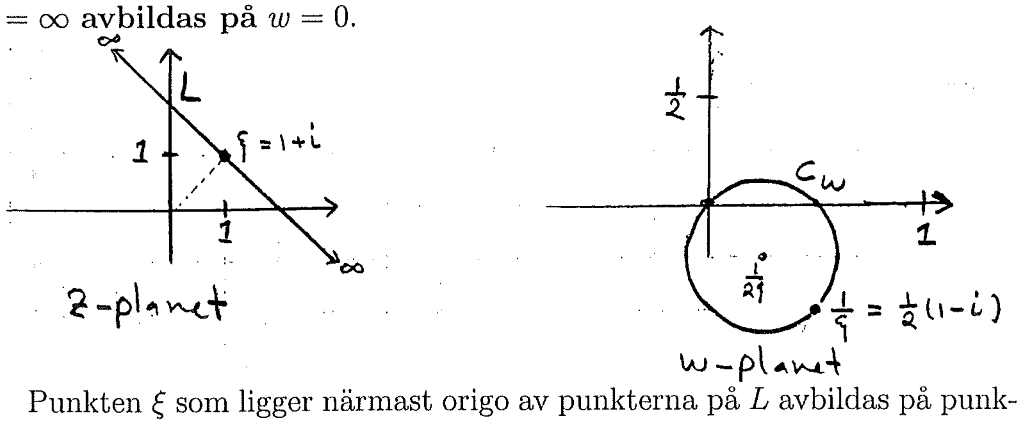
$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{och} \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}. \tag{4.8}$$

Insättning av (4.8) i (4.6) ger:

$$A\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) + B\left(\frac{-v}{u^2 + v^2}\right) = C \Leftrightarrow C\,(u^2 + v^2) - A\,u + B\,v = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2 + v^2 - \frac{A}{C}\,u + \frac{B}{C}\,v = 0.$$

Bilden av L blir en cirkel som går igenom origo i w-planet. Punkten $z = \infty$ avbildas på $w = 0$.



Punkten ξ som ligger närmast origo av punkterna på L avbildas på punkten $1/\xi$ som ligger längst från origo av punkterna på C_w i w-planet.

c) Cirklar som genomlöper origo. Eftersom inversen av $w = 1/z$ ges av $z = 1/w$, som också är en inversion, så fås med stöd av b)-fallet att cirkeln

$$x^2 + y^2 - \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y = 0\,, \tag{4.9}$$

genom origo i z-planet avbildas på linjen $Au + Bv = C$ i w-planet. Då nu varje cirkel genom origo i z-planet kan skrivas i formen (4.9) för lämpligt valda A, B, C där $C \neq 0$, så gäller: **Cirklar som genomlöper origo i z-planet avbildas på linjer i w-planet.**

d) Cirklar som inte genomlöper origo. Om C_z är en cirkel i z-planet som inte genomlöper origo kan den uttryckas med en ekvation

$$x^2 + y^2 + Ax + By = C, \quad C \neq 0\,. \tag{4.10}$$

Om vi utnyttjar (4.8) erhålls ekvationen

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{Au}{u^2+v^2} - \frac{Bv}{u^2+v^2} = C,$$

som förenklas till $1 + Au - Bv = C\,(u^2 + v^2)$. Då $C \neq 0$ erhålls att $u^2 + v^2 - \frac{A}{C}u + \frac{B}{C}v = \frac{1}{C}$. Alltså avbildas cirkeln C_z på en cirkel C_w i w-planet. **Cirklar som inte genomlöper origo i z-planet avbildas på cirklar som inte genomlöper origo i w-planet.** Vi sammanfattar utredningarna i detta avsnitt:

Sats 4.1. *Avbildningarna I. – V. är bijektiva och avbildar "cirklar" $C_z \in C(z)$ i z-planet på "cirklar" $C_w \in C(w)$ i w-planet.*

4.2 Möbiustransformationen

Definition 4.2. En *Möbiustransformation* är en avbildning av formen

$$w = S(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}, \tag{4.11}$$

där a, b, c och d är komplexa konstanter och $ad \neq bc$.

Anmärkning: Med restriktionen $ad \neq bc$ garanteras att nämnaren i (4.11) aldrig är identiskt lika med noll och att $S(z)$ aldrig reduceras till en konstant.

$S(z)$ är en rationell funktion med ordningstalet $p = 1$. **Då antar** $S(z)$ **i det utvidgade komplexa talplanet** $\overline{\mathbb{C}}$ **varje värde (inklusive** ∞ **) precis en gång** (Sats 3.4). Funktionen $S : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ är därmed **bijektiv**.

Om $c \neq 0$ antas $w = \infty$ i punkten $z = -d/c$, som är en **pol av multipliciteten** 1, och värdet $w = a/c$ antas i $z = \infty$.

Om $c = 0$, varvid $a \neq 0$ och $d \neq 0$, sätter vi $-d/c = \infty$ och $a/c = \infty$ i enlighet med räknereglerna (1.48). Då erhålls $S(\infty) = \infty$ och $S(z)$ har en **pol av multipliciteten** 1 i $z = \infty$. Inversen $S^{-1}(w)$ ges av

$$z = S^{-1}(w) = \frac{-d\,w + b}{c\,w - a}. \tag{4.12}$$

För inversen (som också är en Möbiustransformation) gäller $S^{-1}(\infty) = -d/c$ och $S^{-1}(a/c) = \infty$, som i fallet $c = 0$ reduceras till $S^{-1}(\infty) = \infty$. Derivering av (4.11) ger:

$$S'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}. \tag{4.13}$$

Vi ser att $S'(z) \neq 0$ då $z \neq -d/c, \infty$. Med stöd av ovanstående utredningar och Sats 2.16 formuleras följande resultat:

Sats 4.2. *Möbiustransformationen $S(z)$ är analytisk i området $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ och avbildar detta område konformt på området $\mathbf{C} \setminus \{a/c\}$. Om $c = 0$ är avbildningen analytisk och konform i hela $\mathbb{C}$.*

Med stöd av utredningarna i avsnitt 4.1 kan vi nu bevisa "cirkel" invariansen hos Möbiustransformationen:

Sats 4.3. *Vid en Möbiustransformation avbildas "cirklar" i z-planet på "cirklar" i w-planet.*

Bevis: 1. $c = 0$. Då är

$$w = S(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

$S(z)$ är en linjär transformation och avbildar därmed "cirklar" i z-planet på "cirklar" i w-planet.

2. $c \neq 0$. Nu kan vi skriva $S(z)$ i formen

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) - \frac{ad}{c} + b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}. \tag{4.14}$$

Vi ser att $S(z)$ är sammansatt av en linjär transformation (= rotation + dilatation + translation),

$$w_1 = cz + d\,, \tag{4.15}$$

efterföljd av en inversion

$$w_2 = \frac{1}{w_1}, \tag{4.16}$$

och slutligen en till linjär transformation

$$w = \left(b - \frac{ad}{c}\right) w_2 + \frac{a}{c}. \tag{4.17}$$

Med stöd av Sats 4.1 fås då att en Möbiustransformation avbildar "cirklar" i z-planet på "cirklar" i w-planet. □

Anmärkning: En "cirkel" i z-planet som genomlöper polen $z = -d/c$ avbildas på en linje i w-planet. En "cirkel" som inte går igenom polen i z-planet avbildas på en cirkel i w-planet.

Det gäller att $(S^{-1} \circ S)(z) := S^{-1}(S(z)) = z$ för alla $z \in \mathbf{C}$, alltså är $(S^{-1} \circ S)$ en Möbiustransformation. Mera allmänt gäller:

Sats 4.4. *Om $S(z)$ och $T(z)$ är Möbiustransformationer, så är även $(T \circ S)(z) := T(S(z))$ en Möbiustransformation.*

Bevis: Övningsuppgift. □

Definition 4.3. En punkt $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ är en *fixpunkt* för f om $f(z_0) = z_0$.

Sats 4.5. *Om en Möbiustransformation $S(z)$ har mer än två fixpunkter i $\overline{\mathbb{C}}$, så gäller $S(z) = z$ för alla $z \in \overline{\mathbb{C}}$.*

Bevis: 1. $\underline{c = 0}$. Då är $S(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$. Vi ser att $S(\infty) = \infty$, alltså är $z = \infty$ en fixpunkt. För att hitta övriga fixpunkter löser vi följande ekvation i $\mathbb{C}$,

$$S(z) = z \Leftrightarrow \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = z \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d} - 1\right) z + \frac{b}{d} = 0\,. \tag{4.18}$$

För att (4.18) skall ha mer än en lösning bör $\frac{a}{d} - 1 = 0$ och $\frac{b}{d} = 0$ gälla, vilket medför att $b = 0$ och $a = d$. Alltså $S(z) = z$ för alla $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

2. $\underline{c \neq 0}$. Nu är $S(z) = (az + b)/(cz + d)$, så det gäller att $S(\infty) = a/c \neq \infty$. Alltså är $z = \infty$ ingen fixpunkt. Eventuella fixpunkter i $\mathbb{C}$ erhålls ur ekvationen

$$S(z) = z \Leftrightarrow az + b = z(cz + d) \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0\,. \tag{4.19}$$

Eftersom $c \neq 0$ har ekvationen (4.19) högst två olika lösningar. Alltså har $S(z)$ högst två fixpunkter då $c \neq 0$. Satsens påstående följer nu ur punkt 1. och 2. □

Vi övergår nu till att studera avbildningar med Möbiustransformationer.

4.3 Fyra punkters dubbelförhållande

Definition 4.4. Om a, b, c, d är fyra olika komplexa tal i $\overline{\mathbb{C}}$, så definieras betydelsen av beteckningen (a, b, c, d) genom:

$$(a, b, c, d) := \frac{(a - b)(c - d)}{(a - d)(c - b)}\,, \tag{4.20}$$

och kallas talens *dubbelförhållande*. Speciellt om något av talen är ∞ så definieras

$$
\begin{aligned}
(\infty, b, c, d) &= \frac{(c-d)}{(c-b)}, \\
(a, \infty, c, d) &= \frac{(c-d)}{(a-d)}, \\
(a, b, \infty, d) &= \frac{(a-b)}{(a-d)}, \\
(a, b, c, \infty) &= \frac{(a-b)}{(c-b)},
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

dvs. vid beräkning med dubbelförhållanden har vi som konvention att tolka $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

Anmärkning: Ordningsföljden av punkterna i (a, b, c, d) är viktig!

Tag tre godtyckligt valda olika punkter z_1, z_2, z_3 i det utvidgade z-planet och tre godtyckligt valda olika punkter w_1, w_2, w_3 i det utvidgade w-planet. Vi skall nu visa att: **Om det existerar en Möbiustransformation $S(z)$ sådan att $S(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$, så är den entydigt bestämd.** Antag då att S och T är Möbiustransformationer och att $S(z_i) = T(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$. Då gäller $T^{-1}(w_i) = z_i$, $i = 1, 2, 3$. Sammansättningen $(T^{-1} \circ S)(z)$ är enligt Sats 4.4 en Möbiustransformation. Vidare gäller att $(T^{-1} \circ S)(z_i) = T^{-1}(S(z_i)) = z_i$, $i = 1, 2, 3$. Alltså har $(T^{-1} \circ S)(z)$ minst tre fixpunkter i $\overline{\mathbb{C}}$. Med stöd av Sats 4.5 gäller det att $(T^{-1} \circ S)(z) = T^{-1}(S(z)) = z$ för alla $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Detta medför att $T^{-1}(w) = S^{-1}(w)$ för alla $w \in \overline{\mathbb{C}}$, vilket i sin tur medför att $T(z) = S(z)$ för alla $z \in \overline{\mathbb{C}}$. **Alltså finns det högst en Möbiustransformation som avbildar z_1, z_2, z_3 på respektive w_1, w_2, w_3.**

Nu skall vi visa att det alltid går att konstruera en Möbiustransformation $M(z)$ som avbildar z_1, z_2, z_3 på w_1, w_2, w_3. Vi avbildar först z_1 på 0, z_2 på 1 och z_3 på ∞. Detta kan göras genom att fö fixa z_1, z_2, z_3 i $\overline{\mathbb{C}}$ definiera

$$
\begin{aligned}
S(z) &:= \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} = (z, z_1, z_2, z_3), \quad \text{om } z_1, z_2, z_3 \neq \infty\,,\\
S(z) &:= \frac{(z_2-z_3)}{(z-z_3)} = (z, \infty, z_2, z_3), \quad \text{om } z_1 = \infty\,,\\
S(z) &:= \frac{(z-z_1)}{(z-z_3)} = (z, z_1, \infty, z_3), \quad \text{om } z_2 = \infty\,,\\
S(z) &:= \frac{(z-z_1)}{(z_2-z_1)} = (z, z_1, z_2, \infty), \quad \text{om } z_3 = \infty\,.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Alltså $S(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ i alla fall. Om vi väljer tre andra olika punkter w_1, w_2, w_3 så avbildas dessa av $T(w) = (w, w_1, w_2, w_3)$ på $0, 1, \infty$. Då gäller: $T^{-1}(0) = w_1$, $T^{-1}(1) = w_2$ och $T^{-1}(\infty) = w_3$. Vår eftersökta Möbiustransformation $M(z)$ ges då av

$$
w = M(z) = T^{-1}(S(z))\,, \tag{4.23}
$$

ty $M(z_1) = T^{-1}(S(z_1)) = T^{-1}(0) = w_1$, $M(z_2) = T^{-1}(S(z_2)) = T^{-1}(1) = w_2$ och $M(z_3) = T^{-1}(S(z_3)) = T^{-1}(\infty) = w_3$. Ekvationen (4.23) ger att $T(w) = T(T^{-1}(S(z))) = S(z)$, vilket kan skrivas i formen

$$
(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)\,. \tag{4.24}
$$

$M(z)$ kan alltså bestämmas ur ekvationen (4.24) **genom att lösa ut variabeln** w. Vi sammanfattar:

Sats 4.6. *Om z_1, z_2, z_3 är tre olika godtyckligt valda punkter i $\overline{\mathbb{C}}$, och w_1, w_2, w_3 är tre godtyckligt valda olika punkter i $\overline{\mathbb{C}}$, så finns det en entydigt bestämd Möbiustransformation $w = M(z)$ som avbildar z_1 påw_1, z_2 påw_2 och z_3 påw_3. $w = M(z)$ kan beräknas ur ekvation (4.24).*

Exempel 4.2. Bestäm den Möbiustransformation som avbildar punkten 0 på i, punkten 1 på 2 och punkten -1 på 4.
Lösning: Vi beräknar

$$
\begin{aligned}
(z, 0, 1, -1) &= \frac{(z-0)(1-(-1))}{(z-(-1))(1-0)} = \frac{2z}{z+1}\,,\\
(w, i, 2, 4) &= \frac{(w-i)(2-4)}{(w-4)(2-i)} = \frac{-2(w-i)}{(w-4)(2-i)}\,.
\end{aligned}
$$

Den efterfrågade Möbiustransformationen $w = S(z)$ ges då med stöd av (4.24) av

$$\begin{aligned}(z, 0, 1, -1) = (w, i, 2, 4) &\Leftrightarrow \frac{-2(w-i)}{(w-4)(2-i)} = \frac{2z}{z+1} \\ &\Leftrightarrow w = \frac{(16-6i)z+2i}{(6-2i)z+2} =: S(z)\,,\end{aligned}$$

vilket löser uppgiften.

Om $w = S(z)$ ges av (4.24), och vi väljer en fjärde punkt z_4 sådan att $w_4 = S(z_4)$, så gäller

$$(z_4, z_1, z_2, z_3) = (w_4, w_1, w_2, w_3)\,. \tag{4.25}$$

Alltså har vi att:

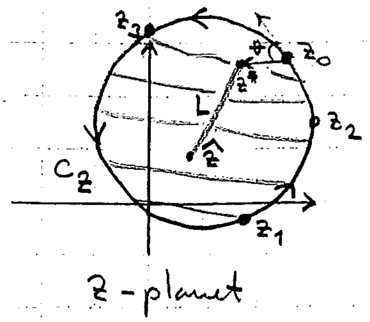
Sats 4.7. *Fyra punkters dubbelförhållande är invariant (oförändrat) vid en Möbiustransformation.*

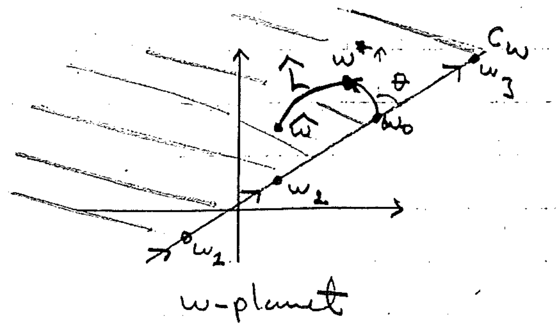
Vi övergår i nästa avsnitt till att behandla avbildningen av områden till vänster om en orienterad "cirkel" i z-planet på områden till vänster om en orienterad "cirkel" i w-planet.

4.4 Avbildning av "cirkelområden"

Om C_z är en "cirkel" i z-planet som är orienterad med hjälp av punkterna z_1, z_2 och z_3, så delas z-planet upp i unionen av C_z och två "cirkelområden", det vänstra området och det högra området med avseende på C_z : s orientering. Antag att C_w är en "cirkel" i w-planet som är orienterad med hjälp av punkterna w_1, w_2 och w_3. Då gäller det att **vid den Möbiustransformation $w = S(z)$, som avbildar z_1, z_2 och z_3 på respektive w_1, w_2 och w_3, avbildas det vänstra området i z-planet på det vänstra området i w-planet.**

Motivering: Tag en punkt $z_0 \in C_z$ sådan att z_0 inte är en pol för $S(z)$. Då gäller $S'(z_0) \neq 0$. Punkten z_0 avbildas **konformt** på punkten $w_0 = S(z_0)$ på C_w. Då kan vi välja en punkt z^* i det vänstra området i z-planet "nära" punkten z_0, så att sträckan början i z_0 och slutande i z^* avbildas på en sträcka eller en cirkelbåge början i w_0 och slutande i w^* i det vänstra området i w-planet.

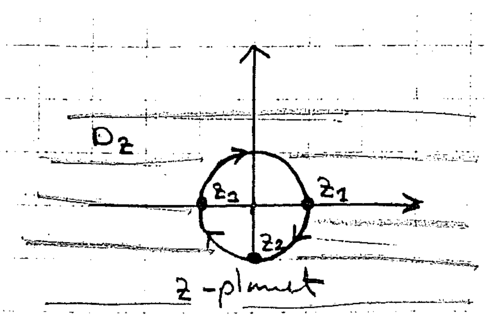


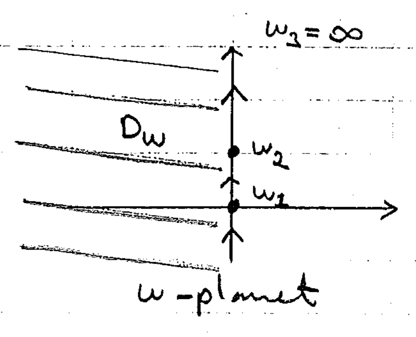


Om vi tar en annan godtycklig punkt $\hat{z} \neq z^*$ i det vänstra området i z-planet, så kan vi förbinda z^* och $\hat{z}$ med en sträcka eller en cirkelbåge L som inte innehåller en pol för $S(z)$. ($\hat{z}$ kan tillåtas vara en pol). Bilden av $\hat{z}$ må vara $\hat{w} = S(\hat{z})$, ($\hat{w} = \infty$ om $\hat{z}$ är pol), och bilden av L är $\hat{L}$. Då är $\hat{L}$ en sträcka, en cirkelbåge eller en stråle i w-planet. $\hat{L}$ ligger helt i det vänstra området i w-planet, ty om $\hat{L}$ skulle ha en skärningspunkt med C_w så skulle det finnas en punkt på L som skulle avbildas på C_w, men detta är omöjligt då $L \cap C_z = \emptyset$. Därmed avbildas $\hat{z}$ på en punkt i det vänstra området i w-planet. Då $S : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ är bijektiv måste det vänstra (högra) området i z-planet avbildas på det vänstra (högra) området i w-planet.

Exempel 4.3. Bestäm en Möbiustransformation $w = S(z)$ som avbildar området $D_z : |z| > 1$ på området $D_w : \operatorname{Re} w < 0$.

Lösning: Vi har att $C_z : |z| = 1$ och $C_w : \operatorname{Re} w = 0$. Tolka D_z som ett vänstra område, välj t.ex. $z_1 = 1$, $z_2 = -i$ och $z_3 = -1$. Tolka D_w som ett vänstra område, välj exempelvis $w_1 = 0, w_2 = i$ och $w_3 = \infty$.





Nu ges $w = S(z)$ av ekvationen $(w, 0, i, \infty) = (z, 1, -i, -1)$ (enligt (4.24)). Alltså erhålls:

$$\frac{w-0}{i-0} = \frac{(z-1)(-i-(-1))}{(z-(-1))(-i-1)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$w = \frac{(z-1)(1+i)}{(z+1)(-1-i)} = \frac{1-z}{1+z} = S(z)\,.$$

Exempel 4.4. Sök en avbildning $w = f(z)$ som avbildar området $D_z = \{z : |z| < 2 \text{ och } |z-1| > 1\}$ på området $D_w : \operatorname{Im} w > 0$. (Rita figur!).
Lösning: Steg 1. Vi "sänder iväg" $z = 2$ till $w_1 = \infty$ med avbildningen $w_1 = S_1(z) = \frac{1}{z-2}$. Då har vi att $S_1(-2) = -\frac{1}{4}$, $S_1(-2i) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ och $S_1(2) = \infty$. **Alltså har vi att** $|z| < 2$ **avbildas på** $\operatorname{Re} w_1 < -\frac{1}{4}$. Vidare gäller att $S_1(0) = -\frac{1}{2}$, $S_1(1+i) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ och $S_1(2) = \infty$. **Därmed avbildas** $|z-1| > 1$ **på** $\operatorname{Re} w_1 > -\frac{1}{2}$. Sammanfattningsvis har vi då att D_z **avbildas på parallellstrimlan** $D_{w_1} : -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} w_1 < -\frac{1}{4}$ **av** $w_1 = S_1(z)$.
Steg 2. Avbildningen $w_2 = w_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2}$ avbildar D_{w_1} på $D_{w_2} : 0 < \operatorname{Re} w_2 < \frac{1}{4}$.
Steg 3. Avbildningen $w_3 = 4\pi e^{i\frac{\pi}{2}} w_2 = 4\pi i(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{2})$ avbildar D_{w_2} på $D_{w_3} : 0 < \operatorname{Im} w_3 < \pi$.
Steg 4. Avbildningen $w = e^{w_3}$ avbildar D_{w_3} på $D_w : \operatorname{Im} w > 0$.
Den sökta avbildningen $w = f(z)$ ges därmed av

$$w = e^{w_3} = e^{4\pi i(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2})} = e^{\frac{2\pi i z}{z-2}} = f(z)\,.$$

4.5 Spegelpunkter

Definition 4.5. Punkterna z_0 och z_0^* är *spegelpunkter* med avseende på "cirkeln" $C_z \in C(z)$, som genomlöper punkterna z_1, z_2 och z_3, om och endast om

$$(z_0^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z_0, z_1, z_2, z_3)}\,. \tag{4.26}$$

Vi skall undersöka den geometriska innebörden av spegelpunkter. **När är** $z_0^* = z_0$? Vi har att $(z_0, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z_0, z_1, z_2, z_3)}$ om och endast om (z_0, z_1, z_2, z_3) är reellt. Vidare kan man visa att (z_0, z_1, z_2, z_3) är reellt då och endast då z_0, z_1, z_2, z_3 är punkter på samma "cirkel", (övningsuppgift). Alltså är $z_0 = z_0^* \Leftrightarrow z_0$ är en punkt på "cirkeln" C_z.

Antag nu att $z_0 \notin C_z$ och att C_z är en linje på vilken z_1, z_2, z_3 är tre olika punkter. Då gäller för något $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ att $z_3 = tz_1 + (1-t)z_2$, (där $t = \infty$ om $z_3 = \infty$). Då kan (4.26) skrivas i formen:

$$\frac{z_0^* - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - (tz_1 + (1-t)z_2)}{z_0^* - (tz_1 + (1-t)z_2)} = \frac{\overline{z}_0 - \overline{z}_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1} \cdot \frac{\overline{z}_2 - (t\overline{z}_1 + (1-t)\overline{z}_2)}{\overline{z}_0 - (t\overline{z}_1 + (1-t)\overline{z}_2)} \tag{4.27}$$

ur vilken vi erhåller

$$z_0^* = \frac{(z_2 - z_1)(\overline{z}_0 - \overline{z}_1)}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1} + z_1 \,. \tag{4.28}$$

Därmed gäller $|z_0^* - z_1| = |z_0 - z_1|$ för alla $z_1 \in C_z$. Då måste z_0 och z_0^* ligga i olika halvplan definierade av C_z och linjen L genom z_0 och z_0^* måste skära C_z vinkelrätt. **Alltså bestämmer z_0 entydigt z_0^* genom (4.28), oberoende av valet av z_1, z_2 och z_3.**

Antag nu att C_z är en cirkel med radien R och medelpunkten a. Antag vidare att $z_0 \notin C_z$ och att $z_0 \neq a$. Genom att utnyttja $R^2 = |z_i - a|^2 = (z_i - a)\overline{(z_i - a)}$, $i = 1, 2, 3$, och invariansen av fyra punkters dubbelförhållande vid en Möbiustransformation, som i detta fall är en translation med $-a$, erhålls:

$$\begin{aligned} \overline{(z_0, z_1, z_2, z_3)} &= \overline{(z_0 - a, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a)} \\ &= \left(\overline{z}_0 - \overline{a}, \frac{R^2}{z_1 - a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}\right). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Genom att i (4.29) tillämpa Möbiustransformationen $w = R^2 \cdot \frac{1}{z}$ och därefter translatera med $+a$ får vi:

$$\begin{aligned} \overline{(z_0, z_1, z_2, z_3)} &= \left(\frac{R^2}{\overline{z}_0 - \overline{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a\right) \\ &= \left(\frac{R^2}{\overline{z}_0 - \overline{a}} + a, z_1, z_2, z_3\right). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Vi erhåller därmed formeln

$$z_0^* = \frac{R^2}{\overline{z}_0 - \overline{a}} + a \,, \tag{4.31}$$

för konstruktion av spegelpunkten z_0^* till punkten z_0. Vidare ger (4.31) att

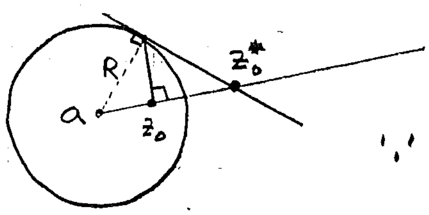
$$|z_0 - a|\,|z_0^* - a| = R^2 \,, \tag{4.32}$$

$$\frac{z_0^* - a}{z_0 - a} = \frac{R^2}{|z_0 - a|^2} \,. \tag{4.33}$$

Ur (4.33) erhålls $\arg(z_0^* - a) = \arg(z_0 - a) + 2\pi n$, vilket innebär att z_0 och z_0^* ligger på en stråle som utgår från medelpunkten a. Vidare är en av punkterna belägen innanför C_z och den andra utanför C_z, för att (4.32) skall gälla. På grund av att (4.32) medför att

$$\frac{R}{|z_0 - a|} = \frac{|z_0^* - a|}{R}$$

kan z_0 och z_0^* konstrueras geometriskt på nedanstående sätt.



$$\therefore \frac{R}{|z_0-a|} = \frac{|z_0^*-a|}{R} \iff |z_0-a||z_0^*-a| = R^2,$$

För $z_0 = a$ definieras $z_0^* = \infty$.

Vid en Möbiustransformation avbildas spegelpunkter på spegelpunkter. Mera exakt uttryckt har vi resultatet:

Sats 4.8. *Låt z_0 och z_0^* vara spegelpunkter för "cirkeln" C_z i z-planet. Antag att C_z avbildas på en "cirkel" C_w i w-planet av Möbiustransformationen $w = M(z)$. Då är $w_0 = M(z_0)$ och $w_0^* = M(z_0^*)$ spegelpunkter för "cirkeln" C_w.*

Bevis: Antag att $w = M(z)$ avbildar z_1, z_2 och z_3 på C_z på respektive w_1, w_2 och w_3 på C_w. Ifall C_z är en cirkel med radie R och medelpunkt a väljer vi $z_1 = a - R$, $z_2 = a + iR$ och $z_3 = a + R$. Ifall C_z är en linje väljs $z_3 = \infty$. Vi antar nu att z_0 avbildas på $w_0 = M(z_0)$ och att w_0^* är spegelpunkt till w_0. Vi skall visa att $w_0^* = M(z_0^*)$. Vi visar först att om C_z avbildas på reella axeln, så avbildas z_0 och z_0^* på spegelpunkter för reella axeln. Låt avbildningen $S(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ avbilda C_z på reella axeln så att z_1, z_2, z_3 avbildas på $0, 1$ och ∞.

1. **C_z är en linje och $z_3 = \infty$.** Nu är $S(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ och $S(z_0) = \frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1}$. Då fås med stöd av (4.28) att

$$S(z_0^*) = \frac{\frac{(z_2 - z_1)(\bar{z}_0 - \bar{z}_1)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} + z_1 - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left(\frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1}\right)} = \overline{S(z_0)}\,.$$

Alltså är $S(z_0)$ och $S(z_0^*)$ spegelpunkter med avseende på reella axeln.

2. C_z **är en cirkel och** $z_1 = a - R$, $z_2 = a + iR$ **och** $z_3 = a + R$. Nu är $S(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$. För $z_0 \neq a$ gäller det med stöd av (4.31) att

$$S(z_0) = \frac{(z_0 - (a - R))(iR - R)}{(z_0 - (a + R))(iR + R)} = i\,\frac{z_0 - (a - R)}{z_0 - (a + R)},$$

$$S(z_0^*) = \frac{\left(\frac{R^2}{\overline{z}_0 - \overline{a}} + R\right)(iR - R)}{\left(\frac{R^2}{\overline{z}_0 - \overline{a}} - R\right)(iR + R)} = i\,\frac{R^2 + R(\overline{z}_0 - \overline{a})}{R^2 - R(\overline{z}_0 - \overline{a})} = -i\,\frac{\overline{z}_0 - \overline{a} + R}{\overline{z}_0 - \overline{a} - R}$$

$$= \overline{-i\left(\frac{z_0 - (a - R)}{z_0 - (a + R)}\right)} = \overline{S(z_0)}\,.$$

För $z_0 = a$ är $S(a) = -i$ och $S(\infty) = i$. **Därmed är** $S(z_0)$ **och** $S(z_0^*)$ **spegelpunkter med avseende på reella axeln.**

Låt nu $T(w)$ avbilda w_1, w_2 och w_3 på $0, 1$ och ∞. Då gäller $w = M(z) = T^{-1}(S(z))$. Vidare fås:

$$w_0 = M(z_0) = T^{-1}(S(z_0)) \Rightarrow T(w_0) = S(z_0),$$

och

$$T(w_0^*) = (w_0^*, w_1, w_2, w_3) = \overline{(w_0, w_1, w_2, w_3)} = \overline{T(w_0)} = \overline{S(z_0)} = S(z_0^*)\,.$$

Alltså gäller $w_0^* = T^{-1}(S(z_0^*)) = M(z_0^*)$ och satsen är bevisad. □

Anmärkning: Med hjälp av Sats 4.8 konstrueras en Möbiustransformation som avbildar C_z på C_w genom att kräva att $z_0 \notin C_z$ avbildas på $w_0 \notin C_w$ och $z_1 \in C_z$ avbildas på $w_1 \in C_w$. Transformationen erhålls ur $(w, w_0, w_0^*, w_1) = (z, z_0, z_0^*, z_1)$.

Exempel 4.5. Bestäm alla Möbiustransformationer som avbildar $|z| < 1$ på $|w| < 1$.

Lösning: Låt $w = S(z)$ vara en sådan avbildning. Då avbildas $C_z : |z| = 1$ på $C_w : |w| = 1$ av denna avbildning. Låt α vara en punkt sådan att $w_0 = S(\alpha) = 0$. Spegelpunkten α^* erhålls ur (4.31) : $\alpha^* = \frac{1}{\overline{\alpha}-0} + 0 = \frac{1}{\overline{\alpha}}$. Då måste $w_0^* = S(\alpha^*) = S(1/\overline{\alpha})$ vara spegelpunkt till $w_0 = 0$. Men eftersom medelpunkten för C_w är w_0 måste $w_0^* = \infty$, dvs. $S(1/\overline{\alpha}) = \infty$. Därmed har S ett nollställe i $z = \alpha$ och en pol i $z = \frac{1}{\overline{\alpha}}$, och måste därmed vara av formen

$$S(z) = k\,\frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\overline{\alpha}}} = k\,\overline{\alpha}\,\frac{z - \alpha}{\overline{\alpha}z - 1}, \quad \text{där } k \in \mathbb{C}\,.$$

Eftersom $S(1) \in C_w$ gäller det att $1 = |S(1)| = |k\,\overline{\alpha}| \left|\frac{1-\alpha}{\overline{\alpha}-1}\right| = |k\,\overline{\alpha}|$. Då gäller $k\,\overline{\alpha} = \mathrm{e}^{i\theta}$ för något θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, och vi har att

$$S(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\,\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}, \quad (|\alpha| < 1)\,. \tag{4.34}$$

Man bör nu även visa att varje Möbiustransformation av formen (4.34) avbildar $|z| < 1$ på $|w| < 1$, detta lämnas som övningsuppgift. Svaret på vår uppgift ges då av alla Möbiustransformationer av formen (4.34), där $0 \leq \theta < 2\pi$ och $|\alpha| < 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$.