3 Elementära funktioner

3.1 Rationella funktioner

Vi behandlar först potensfunktionen $w = f(z) = z^n$, $n = 2, 3, \ldots$. Tidigare har visats att f är analytisk i hela $\mathbf{C}$ och att $f'(z) = nz^{n-1}$. Vi undersöker nu hur avbildningen $w = f(z)$ avbildar z-planet på w-planet. Det gäller att $|w| = |z|^n$ och att $\arg w = n \cdot \arg z$. Därmed avbildas cirkeln $|z| = r$ i z-planet på cirkeln $|w| = r^n$ i w-planet. Den från origo utgående strålen $\arg z = \theta$ avbildas på strålen $\arg w = n\,\theta$ i w-planet. Därmed är avbildningen **inte** konform i origo. I punkten $z_0 \neq 0$ gäller $f'(z_0) \neq 0$, och avbildningen är därmed konform i $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Om vi sätter $w = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ vet vi från tidigare att lösningarna till ekvationen $z^n = w$ ges av

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\Big(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\Big) + i\,\sin\Big(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\Big)\Big), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Av dessa n värden ligger precis ett i var och en av sektorerna

$$F_k = \{z \in \mathbb{C} : \frac{2\pi k}{n} \leq \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{n}\} \cup \{0\}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,. \quad (3.1)$$

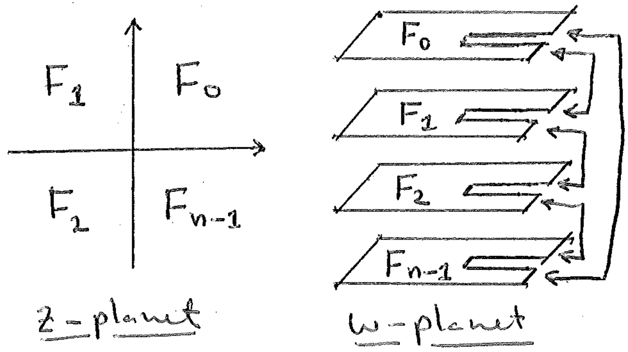
Varje sektor F_k avbildas då bijektivt av $w = z^n$ på hela w-planet. Varje sektor innehåller $z = 0$, så ingen sektor avbildas konformt på w-planet. Om vi betraktar de öppna sektorerna

$$G_k = \{z \in \mathbb{C} : \frac{2\pi k}{n} < \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{n}\}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,, \qquad (3.2)$$

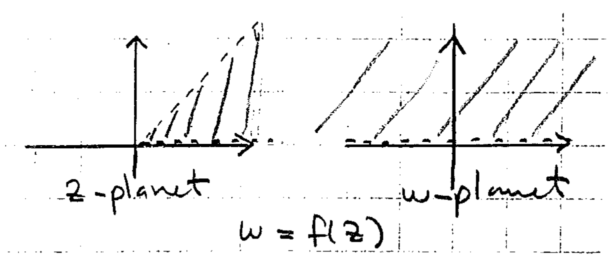
som är områden, så förmedlar $w = z^n$ en konform avbildning av varje sektor G_k på w-planet minus den positiva reella axeln. Vi säger då att w-planet är uppskuret längs den positiva reella axeln från 0 till ∞.

Sats 3.1. *Potensfunktionen $w = z^n$ $(n \geq 2)$ är en i hela planet analytisk funktion, som förmedlar en konform avbildning överallt utom i origo. Vinklar med spetsen i origo n-faldigas. Funktionen avbildar varje öppen sektor G_k i (3.2) konformt på hela w-planet, uppskuret längs positiva reella axeln från* 0 *till ∞.*

(I en parentes skall vi kort beskriva vad som avses med en **Riemann yta** R_w för avbildningen $w = z^n$. För att få en omvändbar avbildning kan vi tänka oss att vi staplar upp n stycken w-plan, som alla är uppskurna längs positiva reella axeln, ovanpå varandra. Det översta bladet får svara mot avbildningen av sektorn F_0, det följande mot F_1 osv. Det understa bladet svarar mot avbildningen av sektorn F_{n-1}. Nu förenar vi bladen till en sammanhängande yta genom att låta en från origo utgående stråle rotera ett varv moturs i z-planet, varvid den nedre uppskurna kanten av F_0 fogas till den övre uppskurna kanten av F_1 osv. Slutligen fäster vi det understa bladets nedre kant till det översta bladets övre uppskurna kant. Härvidlag har vi fått en sammanhängande yta, den n-bladiga Riemann ytan R_w. Varje punkt $w \neq 0$ uppträder en gång på varje blad, $w = 0$ uppträder en gång i en gemensam punkt för alla ihoplimmade blad. Därmed förmdelar $w = z^n$ en omvändbar avbildning av z-planet på Riemann ytan R_w, se figuren nedan.)



Exempel 3.1. Avbilda området $\{z : 0 < \arg z < \pi/4\}$ konformt på området $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.
Lösning: Eftersom $w = z^n$ med stöd av Sats 3.1 n-faldigar vinklar med spetsen i origo, så bör vi välja $n = 4$. Alltså ger $w = z^4$ den eftersökta konforma avbildningen.



Funktionen

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \,,$$

där $a_n \neq 0$ och där a_k, $k = 0, \ldots, n$, är komplexa tal, är ett **polynom av n :te graden**. Vi har tidigare visat att $p_n(z)$ **är analytisk i hela $\mathbb{C}$**. Senare skall vi bevisa att varje icke-konstant polynom har minst ett nollställe i $\mathbb{C}$ (algebrans fundamentalsats). Låt z_1 vara ett nollställe för $p_n(z)$. Om vi utför divisionen $p_n(z)/(z-z_1)$ så långt att resten R blir oberoende av z får vi $p_n(z) \equiv (z-z_1)p_{n-1}(z)+R$. Om vi sätter in $z = z_1$ erhålls $0 = 0 \cdot p_{n-1}(z_1)+R$, alltså $R = 0$. Då gäller:

Sats 3.2. (Faktorteoremet). *Om polynomet $p_n(z)$ har ett nollställe z_1, så kan polynomet skrivas i formen*

$$p_n(z) \equiv (z - z_1)\, p_{n-1}(z) \,,$$

där $p_{n-1}(z)$ är ett polynom av gradtal $n - 1$.

Om $n - 1 \geq 1$ har $p_{n-1}(z)$ enligt algebrans fundamentalsats minst ett nollställe z_2. Genom växelvis användning av algebrans fundamentalsats och faktorteoremet kan vi skriva:

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdot \;\ldots\; \cdot (z - z_n) \,. \tag{3.3}$$

$p_n(z)$ **har alltså precis n stycken nollställen i $\mathbb{C}$,** av vilka endel kan sammanfalla. Om ν_1 stycken är z_1, ν_2 stycken är $z_2, \ldots,$ ν_k stycken är z_k, där $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k = n$, $1 \leq k \leq n$, så kan $p_n(z)$ i (3.3) skrivas i formen

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)^{\nu_1}(z - z_2)^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{\nu_k} \,. \tag{3.4}$$

Talet $z_\mu \in \mathbb{C}$ säges vara ett ν_μ-faldigt nollställe, eller ett nollställe av multipliciteten ν_μ.

Definition 3.1. Den analytiska funktionen f säges ha ett *ν-faldigt* nollställe, ett nollställe av *multipliciteten (ordningen)* ν, i punkten $z = a$, om f kan skrivas i formen

$$f(z) = (z - a)^\nu g(z) \,, \tag{3.5}$$

där $g(a) \neq 0$ och g är analytisk i en omgivning av $z = a$. Vidare säges ∞-punkten vara ett *ν-faldigt* nollställe för funktionen om

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{z\to\infty} z^\nu f(z) \neq 0, \infty \,. \tag{3.6}$$

Definition 3.2. Om funktionen $f(z) - c$, $c \in \mathbb{C}$, har ett ν-faldigt nollställe i punkten $a \in \overline{\mathbb{C}}(= \mathbb{C} \cup \infty)$, så har f ett *ν-faldigt c-ställe* i punkten a. Man säger att värdet c antas ν gånger av f i punkten a.

Betrakta igen polynomet $p_n(z)$. För varje $c \in \mathbb{C}$ är $p_n(z) - c$ ett polynom av gradtal n som har exakt n stycken nollställen i $\mathbb{C}$. **Polynomet $p_n(z)$ har alltså exakt n stycken c -ställen**, då multipliciteten beaktas.

Vi undersöker nu vad som inträffar när $z \to \infty$ i polynomet $p_n(z)$. Omskrivning av $p_n(z)$ i formen

$$p_n(z) = z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right), \tag{3.7}$$

samt beaktande av (1.33) ger att

$$|p_n(z)| \geq |z|^n \left| |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right|. \tag{3.8}$$

För $|z|$ stort gäller $|a_{n-1}/z + \ldots + a_0/z^n| < |a_n|/2$. Därmed gäller det att $|p_n(z)| \geq |z|^n |a_n|/2$ för $|z|$ tillräckligt stort, och då måste det gälla att $|p_n(z)| \to \infty$, då $|z| \to \infty$, vilket innebär att $\lim_{z\to\infty} p_n(z) = \infty$. Ur (3.7) följer å andra sidan att

$$\lim_{z\to\infty} \frac{p_n(z)}{z^n} = \lim_{z\to\infty}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right) = a_n \neq 0, \infty\,.$$

Vi säger då att $p_n(z)$ **har en pol av multipliciteten n i ∞-punkten,** eller att $p_n(z)$ har en **n-faldig pol i ∞-punkten.**

Definition 3.3. Antag att f är analytisk i en punkterad omgivning av $z = a \in \mathbb{C}$. Då säges f ha en *ν-faldig pol* eller en *pol av multipliciteten ν* i punkten a om

$$\lim_{z\to a}(z-a)^\nu f(z) \neq 0, \infty \quad \text{och} \quad \lim_{z\to a} f(z) = \infty\,. \tag{3.9}$$

Likaså säges ∞-punkten vara en *ν-faldig pol* till f, om

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^\nu} \neq 0, \infty\,. \tag{3.10}$$

För polynom gäller då

Sats 3.3. *Ett polynom $p_n(z)$ av gradtal n : antar varje värde (inklusive ∞) exakt n gånger i det utvidgade komplexa talplanet $\overline{\mathbb{C}}$.*

En rationell funktion R är av formen

$$R(z) = \frac{p_m(z)}{q_n(z)} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_0}, \quad a_m \neq 0,\ b_n \neq 0, \tag{3.11}$$

där vi antar att $p_m(z)$ och $q_n(z)$ saknar gemensamma nollställen, dvs. är oförkortbara. Genom att upplösa p_m och q_n i faktorer i enlighet med (3.4) får vi med stöd av definitionerna 3.1 och 3.3 att $R(z)$ i komplexa talplanet $\mathbb{C}$ har **nollställen precis i de punkter, där $p_m(z)$ har nollställen** och **poler i de punkter där $q_n(z)$ har nollställen.** $R(z)$ har alltså m **nollställen** och n **poler i** $\mathbb{C}$ då multipliciteten beaktas. Vi skall undersöka R :s värden då $z \to \infty$, och skriver därför R i formen

$$R(z) = z^{m-n} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{b_0}{z^n}}, \tag{3.12}$$

och beaktar tre olika fall:
(1) $\underline{m > n}$: Då gäller

$$\lim_{z \to \infty} R(z) = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{z \to \infty} \frac{R(z)}{z^{m-n}} = \frac{a_m}{b_n} \neq 0, \infty\,.$$

$R(z)$ har en $(m-n)$-faldig pol i ∞-punkten.
(2) $\underline{m = n}$: Då gäller

$$\lim_{z \to \infty} R(z) = \frac{a_m}{b_n} \neq 0, \infty\,.$$

R har varken pol eller nollställe i ∞-punkten.
(3) $\underline{m < n}$: Då gäller

$$\lim_{z \to \infty} R(z) = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{z \to \infty} z^{n-m} R(z) = \frac{a_m}{b_n} \neq 0, \infty\,.$$

R har ett $(n-m)$-faldigt nollställe i ∞-punkten.
Resultaten av undersökningarna kan sammanfattas i en tabell.

	Antal nollställen			Antal poler		
	i $\mathbb{C}$	i ∞	totalt	i $\mathbb{C}$	i ∞	totalt
$m > n$	m	–	m	n	$m-n$	m
$m = n$	m	–	$m = n$	n	–	$m = n$
$m < n$	m	$n-m$	n	n	–	n

Vi konstaterar att totala antalet nollställen = totala antalet poler = $\max(m, n)$ i alla tre fallen.

Definition 3.4. Talet $p = \max(m, n)$ *kallas* ordningstalet *för funktionen* $R(z) = p_m(z)/q_n(z)$.

En rationell funktion har alltså i det utvidgade komplexa talplanet $\overline{\mathbb{C}}$ **exakt så många nollställen och så många poler som ordningstalet anger.**

Vi skall undersöka R:s c-ställen. Vi bildar funktionen

$$R(z) - c = \frac{p_m(z) - c\,q_n(z)}{q_n(z)}, \tag{3.13}$$

där $c \neq 0, \infty$. Nu antogs p_m och q_n oförkortbara. Därmed har täljaren och nämnaren i (3.13) inga gemensamma faktorer, ty en sådan faktor skulle då vara gemensam för p_m och q_n. Då bråket (3.13) inte kan förkortas är dess ordningstal $= \max(m, n)$, vilket sammanfaller med R :s ordningstal p. Då har $R(z) - c$ exakt p nollställen, vilket betyder att $R(z)$ har exakt p stycken c-ställen. Sammanfattningsvis:

Sats 3.4. *En rationell funktion antar i det utvidgade komplexa talplanet* $\overline{\mathbb{C}}$ *varje värde (inklusive* ∞*) exakt så många gånger som funktionens ordningstal anger.*

3.2 Exponentialfunktionen, logaritmen och potensen

Låt $z = x + iy$ och betrakta funktionen

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Vi har i Exempel 2.8 visat att f **är en hel funktion** och att $f'(z) = f(z)$ **i hela** $\mathbb{C}$. Vidare ser vi att $f'(z) \neq 0$ i $\mathbb{C}$ och därmed förmedlar $w = f(z)$ en **konform avbildning av** z**-planet**. Låt $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Då gäller:

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) \\ &= e^{x_1} e^{x_2}(\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= f(z_1)\, f(z_2), \quad (z_j = x_j + iy_j,\ j = 1, 2). \end{aligned}$$

Därmed är följande definition motiverad.

Definition 3.5. *Exponentialfunktionen*, betecknad e^z, definieras genom formeln

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy. \tag{3.14}$$

De egenskaper som vi utrett för e^z sammanfattas i följande sats.

Sats 3.5. *För exponentialfunktionen* e^z *gäller:*
a) e^z *är analytisk i hela* $\mathbb{C}$ *och* $\frac{de^z}{dz} = e^z \neq 0$ *i* $\mathbb{C}$.
b) Avbildningen $w = e^z$ *är konform i hela* z*-planet.*
c) För alla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gäller:* $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.
d) För alla $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ *gäller:* $|e^z| = e^x$ *och* $\arg e^z = y$.

Låt nu $z = i\,y,\ y \in \mathbb{R}$. Då erhålls **Eulers formler**:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \tag{3.15}$$

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y. \tag{3.16}$$

Addition och subtraktion av (3.15) och (3.16) ger formlerna

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{och} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \tag{3.17}$$

Om vi i (3.15) insätter $y = \pi$ erhålls sambandet

$$e^{i\pi} = -1. \tag{3.18}$$

Vi har tidigare framställt komplexa tal i polär form, $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, där $r = |z|$ och $\theta = \arg z$. Med stöd av formel (3.15) erhålls **standardframställningen av ett komplext tal** z:

$$z = r\, e^{i\theta}. \tag{3.19}$$

Definition 3.6. En funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ är *periodisk* med perioden w, om $f(z+w) = f(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$. (w period $\Rightarrow nw$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, även är en period). Om funktionen f inte har andra perioder än nw, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, så är f *enkelt periodisk* med den *primitiva perioden* w.

Vi skall nu utreda periodiciteten hos exponentialfunktionen, och frågar oss: Har ekvationen $e^{z+w} = e^z$ lösningar w som gäller för alla $z \in \mathbb{C}$? Sätt $w = x + i\,y$. Då erhålls

$$
\begin{aligned}
e^{z+w} = e^z &\Leftrightarrow e^z \cdot e^w = e^z \Leftrightarrow e^w = 1, \text{ (ty } e^z \neq 0) \\
&\Leftrightarrow e^x(\cos y + i \sin y) = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n), \ n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{och} \quad y = 2\pi n, \ n = \pm 1, \pm 2, \ldots .
\end{aligned}
$$

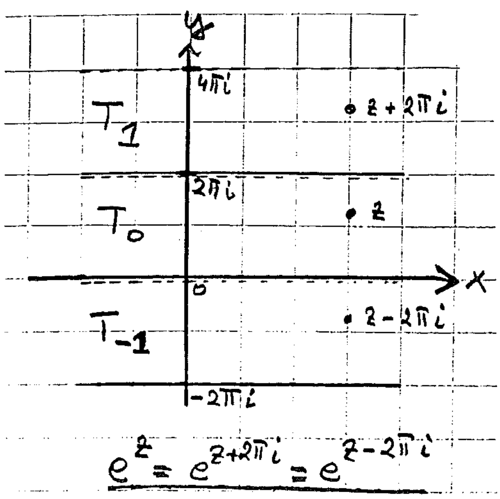
Alltså har vi $w = 2\pi n\, i$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Sats 3.6. *Exponentialfunktionen är enkelt periodisk med den primitiva perioden $w = 2\pi\, i$.*

Vi drar i z-planet, genom punkterna $\pm 2\pi\, i$, $\pm 4\pi\, i$, $\pm 6\pi\, i$, ..., paralleller till reella axeln, varvid z-planet blir indelat i **parallellstrimlor** T_n,

$$
T_n = \{z \in \mathbf{C} : 2\pi n \leq \operatorname{Im} z < 2\pi(n+1)\}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{3.20}
$$

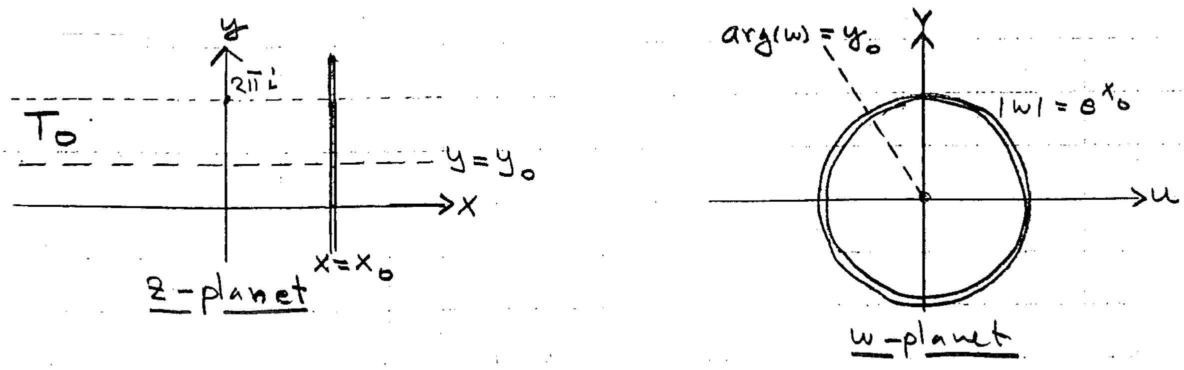
I varje parallellstrimla antar e^z alla sina värden. Vid övergång från en parallellstrimla till en annan upprepar sig funktionsvärdena periodiskt. Parallellstrimlorna kallas **periodzoner** för e^z.



På grund av periodiciteten räcker det att studera avbildningen $w = e^z$ i en parallellstrimla. Vi väljer

$$T_0 = \{z \in \mathbf{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\}.$$

Låt $z = x + iy$. Vi har då $|w| = e^x$ och $\arg w = y$. **Räta linjen** $x = x_0$ i z-planet **avbildas på cirkeln** $|w| = e^{x_0}$ i w-planet och **räta linjen** $y = y_0$ **avbildas på strålen** $\arg w = y_0$. **Speciellt:** Imaginära axeln avbildas på enhetscirkeln $|w| = 1$ och reella axeln avbildas på den positiva reella axeln, räta linjen $y = \pi$ avbildas på den negativa reella axeln.



Genom varje punkt i w**-planet går exakt en cirkel av typen** $|w| = e^{x_0}$ **och exakt en stråle av typen** $\arg w = y_0$. Varje punkt i w-planet (utom $w = 0$) svarar mot exakt en punkt (x_0, y_0) i varje periodzon.

Sats 3.7. *Exponentialfunktionen avbildar varje periodzon* T_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *konformt och bijektivt på hela* w*-planet, utom punkten* $w = 0$.

Exempel 3.2. a) Parallellstrimlan $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ avbildas på det längs positiva reella axeln uppskurna w-planet.
b) Parallellstrimlan $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ avbildas på övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$.
c) Halvstrimlan $z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ \operatorname{Re} z < 0\}$ avbildas på halvcirkeln $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.

Exempel 3.3. Sök en analytisk funktion $w = f(z)$ som avbildar parallellstrimlan $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi$ på övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$.
Lösning: Steg 1. Vi önskar först vrida parallellstrimlan vinkeln $\pi/2$ (rita figur!). Detta å stadkoms med transformationen $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} z = i\,z$. Då överförs parallellstrimlan på $\{z_1 : 0 < \operatorname{Im} z_1 < 2\pi\}$.
Steg 2. Denna parallellstrimla bör komprimeras till halva sin bredd, vilket görs med $z_2 = \frac{1}{2} z_1 = \frac{i}{2} z$. Då överförs parallellstrimlan på $\{z_2 : 0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi\}$.
Steg 3. Med stöd av Exempel 3.2 b) ges då den eftersökta avbildningen av $w = e^{z_2} = e^{\frac{i}{2}z} = f(z)$.

Exponentialfunktionen är inte en injektiv avbildning från z-planet till w-planet$\setminus\{0\}$. Vi kan alltså inte definiera en invers till e^z. Trots detta inför vi logaritmen $\ln z$ genom:

$$w = \ln z \Leftrightarrow z = e^w, \quad z \neq 0\,. \tag{3.21}$$

Logaritmen $\ln z$ är då ingen funktion, eftersom för ett givet värde $z \neq 0$ erhålls oändligt många värden $w = \ln z$ som skiljer sig från varandra med en heltalig multipel av $2\pi\,i$. (Ett värde w ur varje periodzon för e^w i w-planet). Sätt nu $z = r\,e^{i\theta}$, där $r > 0$, och $w = u + i\,v$. Då gäller

$$\begin{aligned} z = e^w &\Leftrightarrow r\,e^{i\theta} = e^{u+i\,v} = e^u(\cos v + i\,\sin v) \\ &\Leftrightarrow u = \ln r \quad \text{och} \quad \theta = v + 2\pi\,n, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

där $\ln r$ betecknar den entydigt bestämda reella logaritmen för $r > 0$. Vi erhåller därmed en **formel för beräkning av alla värden på** $\ln z$, nämligen

$$\ln z = u + i\,v = \ln|z| + i\,(\arg z + 2\pi\,n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\,. \tag{3.22}$$

Om vi i formel (3.22) väljer argumentet av z så att $0 \leq \arg z < 2\pi$ och $n = 0$, så erhålls **logaritmens principalgren**:

$$\ln z = \ln|z| + i\,\arg z\,, \quad 0 \leq \arg z < 2\pi\,. \tag{3.23}$$

Principalgrenen är invers till exponentialfunktionens restriktion till periodzonen T_0.

Varje enskild gren av logaritmen är invers till restriktionen av exponentialfunktionen till någon periodzon. Då kan den allmänna formeln, $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$, för derivering av en invers tillämpas på varje gren av logaritmen. Med $w = \ln z$ och $z = e^w$ erhålls då

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0\,.$$

Alltså får vi formeln

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0\,. \tag{3.24}$$

Observera att varje enskild gren av logaritmen är analytisk i $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Sätt nu $w_1 = \ln z_1$ och $w_2 = \ln z_2$, varvid $z_1 = e^{w_1}$ och $z_2 = e^{w_2}$. Vidare gäller $z_1 \cdot z_2 = e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2}$, vilket med stöd av (3.21) är ekvivalent med $\ln(z_1 z_2) = w_1 + w_2 = \ln z_1 + \ln z_2$. Vi får således formeln

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2\,. \tag{3.25}$$

Formel (3.25) gäller endast om grenvalet görs lämpligt i vänster- och högerled.

Exempel 3.4. Låt $z_1 = -1$, $z_2 = -i$ och välj principalgrenen $n = 0$ i högerled av (3.25). Då erhålls $\ln z_1 = \ln(-1) = \pi\, i$ och $\ln z_2 = \ln(-i) = \frac{3\pi}{2}\, i$. Alltså $\ln z_1 + \ln z_2 = \frac{5\pi}{2}\, i$. Alla värden för vänstra ledet kan beräknas med (3.22).

$$\ln(z_1 z_2) = \ln i = \ln |i| + i \left(\frac{\pi}{2} + n\, 2\pi \right).$$

Därmed bör vi välja $n = 1$ i vänstra ledet för att få överensstämmelse.

För $z_2 \neq 0$ har vi med stöd av (3.25) att $\ln z_1 = \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\, z_2\right) = \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \ln z_2$. Därmed erhålls formeln

$$\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2, \quad z_2 \neq 0\,, \tag{3.26}$$

som gäller vid **lämpligt grenval** av logaritmerna.

Definition 3.7. Den *allmänna potensen* z^c definieras genom

$$z^c = e^{c \ln z}, \quad z \neq 0,\ c \in \mathbb{C}\,. \tag{3.27}$$

Med hjälp av deriveringsreglerna för e^z och $\ln z$ fås

$$\frac{dz^c}{dz} = \frac{d\, e^{c \ln z}}{dz} = e^{c \ln z}\, c\, \frac{1}{z} = c\, z^{c-1}, \quad z \neq 0\,. \tag{3.28}$$

Då $\ln z$ är mångtydig, blir även z^c i regel mångtydig.

Exempel 3.5. Beräkna alla värden på i^i. **Lösning:**

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i\,(\ln |i| + i\,(\frac{\pi}{2} + 2\pi\, n))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi\, n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,.$$

3.3 Trigonometriska funktioner

För reellt y gäller $\cos y = (e^{iy} + e^{-iy})/2$ och $\sin y = (e^{iy} - e^{-iy})/(2i)$. Vi inför följande definition.

Definition 3.8. Låt $z \in \mathbb{C}$. Funktionerna $\sin z$ och $\cos z$ definieras genom formlerna

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad \text{och} \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right). \tag{3.29}$$

Då e^{iz} och e^{-iz} är hela funktioner blir $\sin z$ **och** $\cos z$ **analytiska i hela** $\mathbb{C}$. Vi erhåller derivatorna

$$\frac{d\cos z}{dz} = \frac{1}{2}\left(i\,e^{iz} - i\,e^{-iz}\right) = -\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\sin z, \tag{3.30}$$

$$\frac{d\sin z}{dz} = \frac{1}{2i}\left(i\,e^{iz} - (-i)\,e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos z. \tag{3.31}$$

För $\cos z$ och $\sin z$ gäller precis samma trigonometriska formler som för de reella funktionerna $\sin x$ och $\cos x$. Bland annat gäller följande formler:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z\,, \tag{3.32}$$

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z\,, \tag{3.33}$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1\,, \tag{3.34}$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1\,, \tag{3.35}$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2\,, \tag{3.36}$$

$$\sin 2z = 2\sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z\,. \tag{3.37}$$

Ovanstående formler kan bevisas med hjälp av (3.29) och exponentialfunktionens egenskaper. Bevisen lämnas som övningsuppgifter.

Sats 3.8. *Funktionerna* $\sin z$ *och* $\cos z$ *har sina nollställen på reella axeln.*

$$a)\ \sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$b)\ \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

Bevis: 1. ($\Leftarrow$). Klart att $\sin z = 0$ då $z = k\pi$, ty $\sin z$ antar samma värden som den reella sinusfunktionen på reella axeln.

2. ($\Rightarrow$). $\sin z = 0 \Rightarrow (e^{iz} - e^{-iz})/(2i) = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Rightarrow iz = -iz + 2\pi k i \Rightarrow z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Därmed har vi bevisat fallet a). Analogt bevis av b). $\square$

Formel (3.32) ger att $\sin z$ och $\cos z$ är periodiska med perioderna $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Finns det andra perioder? Antag att w är en period för $\cos z$. Vi har då att $\cos(z+w) = \cos z$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Speciellt för $z = 0$ och $z = -\pi/2$ erhålls $\cos w = 1$ respektive $\sin w = 0$. Den senare likheten fås med stöd av formeln $\cos(w-\pi/2) = \sin w$, som visas med hjälp av (3.36). Alltså gäller det att $e^{iw} = \cos w + i \sin w = 1$, vilket innebär att $w = 2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Analogt visas att $w = 2\pi n$ är de enda perioderna för $\sin z$.

Sats 3.9. *Funktionerna* $\sin z$ *och* $\cos z$ *är enkelt periodiska med den primitiva perioden* 2π.

Som periodzoner för $\sin z$ och $\cos z$ kan man välja parallellstrimlorna

$$T_n = \{z \in \mathbf{C} : 2\pi n \leq \operatorname{Re} z < 2\pi(n+1)\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.38}$$

Om vi i (3.29) sätter in $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, erhålls formlerna

$$\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh y\,,) \tag{3.39}$$

$$\sin(iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y}) = i\,\frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}) = i\,\sinh y\,. \tag{3.40}$$

Vi har således etablerat ett samband mellan de trigonometriska och hyperboliska funktionerna. Vidare ses ur (3.39) och (3.40) att $\sin z$ och $\cos z$ **är inte begränsade i komplexa talplanet.** Med stöd av formlerna (3.35), (3.36), (3.39) och (3.40) visas för $z = x + iy$ formlerna

$$\cos z = \cos x\,\cosh y - i\,\sin x\,\sinh y\,, \tag{3.41}$$

$$\sin z = \sin x\,\cosh y + i\,\cos x\,\sinh y\,, \tag{3.42}$$

varvid reella och imaginära delarna av $\sin z$ och $\cos z$ är ådagalagda.

Definition 3.9. För $z \in \mathbf{C}$ definieras $\tan z$ och $\cot z$ genom formlerna

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{och} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}\,, \tag{3.43}$$

i de punkter där $\cos z \neq 0$ respektive $\sin z \neq 0$.

Då är $\tan z$ odefinierad i punkterna $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, och $\cot z$ i punkterna $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Dessa punkter utgör poler av ordning 1 för funktionerna, (detta skall visas senare). Om vi tillordnar funktionerna värdet ∞ i polerna, så blir de definierade i hela $\mathbb{C}$.

Med hjälp av deriveringsreglerna för $\sin z$ och $\cos z$ erhålls

$$\frac{d \tan z}{dz} = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \text{och} \quad \frac{d \cot z}{dz} = -\frac{1}{\sin^2 z}. \tag{3.44}$$

Sats 3.10. *Funktionerna* $\tan z$ *och* $\cot z$ *är analytiska överallt i* $\mathbb{C}$, *med undantag av sina poler.*

För $\tan z$ och $\cot z$ gäller samma trigonometriska formler som är kända för $\tan x$ och $\cot x$ i den reella analysen.

Vi övergår till att studera periodiciteten för $\tan z$. (Analog utredning för $\cot z$). Antag att w är en period för $\tan z$. Då gäller $\tan(z + w) = \tan z$ för alla $z \in \mathbf{C}$. Speciellt för $z = 0$ erhålls $\tan w = \tan 0 = 0 \Leftrightarrow w = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Den enda möjliga primitiva perioden är alltså $w = \pi$. Är detta en period? Svaret är ja, ty

$$\tan(z + \pi) = \frac{\sin(z + \pi)}{\cos(z + \pi)} = \frac{-\sin z}{-\cos z} = \tan z.$$

Sats 3.11. *Funktionerna* $\tan z$ *och* $\cot z$ *är enkelt periodiska med den primitiva perioden* π.

Som periodzoner för $\tan z$ och $\cot z$ kan man välja

$$T_n = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} + n\pi \leq \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} + n\pi\}. \tag{3.45}$$

Med stöd av formel (3.29) kan $\tan z$ och $\cot z$ uttryckas med hjälp av exponentialfunktionen, vi får

$$\tan z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \quad \text{och} \quad \cot z = i\,\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}. \tag{3.46}$$

Arcusfunktionerna definieras genom:

$$w = \arccos z \Leftrightarrow z = \cos w, \tag{3.47}$$

$$w = \arcsin z \Leftrightarrow z = \sin w, \tag{3.48}$$

$$w = \arctan z \Leftrightarrow z = \tan w, \tag{3.49}$$

$$w = \operatorname{arccot} z \Leftrightarrow z = \cot w. \tag{3.50}$$

Då de trigonometriska funktionerna är periodiska blir **arcusfunktionerna mångtydiga,** och är inga egentliga funktioner. **Lämpliga grenval blir entydigt bestämda inverser till lämpligt valda restriktioner** av motsvarande trigonometriska funktioner.