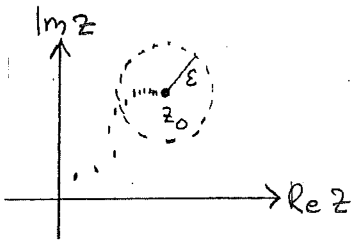
2 Analytiska funktioner

2.1 Talföljd, funktion, gränsvärde och kontinuitet

En oändlig följd av komplexa tal $z_1, z_2, z_3, \ldots$ betecknas $\{z_n\}$ eller $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definition 2.1. En talföljd $\{z_n\}$ säges ha *gränsvärdet* $z_0 \neq \infty$, om för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $N_\varepsilon > 0$ sådant att $n > N_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon$. I detta fall är talföljden konvergent och vi använder beteckningen $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ eller $z_n \to z_0$ då $n \to \infty$.



Om för varje positivt tal k finns ett heltal N_k så att $n > N_k \Rightarrow |z_n| > k$ skriver vi $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. I detta fall är talföljden inte konvergent. Talföljden är *begränsad* om det finns ett heltal $k > 0$ sådant att $|z_n| \leq k$ för alla n.

Sats 2.1. *Varje konvergent talföljd är begränsad.*

Bevis: Övningsuppgift. □

Anmärkning: En begränsad talföljd behöver inte vara konvergent. Exempelvis är talföljden $\{z_n\}$, där $z_n = (-1)^n + 1/n$, begränsad, ty $|z_n| \leq 3/2$ för alla n, men talföljden är inte konvergent.

För att undersöka om en talföljd $\{z_n\}$ konvergerar kan man undersöka de reella talföljderna $\{\mathrm{Re}\, z_n\}$ och $\{\mathrm{Im}\, z_n\}$.

Sats 2.2. *Beteckna* $z_0 = x_0 + iy_0$ *och* $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Då gäller*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \textit{och} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0\right).$$

Bevis: 1. ($\Rightarrow$) Antag att $z_n \to z_0$ då $n \to \infty$. Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. Då finns det ett $N_\varepsilon > 0 : n > N_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon$. Med stöd av (1.27) gäller $|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$ och $|y_n - y_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$ då $n > N_\varepsilon$. Alltså gäller $x_n \to x_0$ och $y_n \to y_0$ då $n \to \infty$.

2. ($\Leftarrow$) Antag att $x_n \to x_0$ och $y_n \to y_0$ då $n \to \infty$. Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. Då finns ett heltal $N_{\varepsilon/2}$ sådant att $|x_n - x_0| < \varepsilon/2$ och $|y_n - y_0| < \varepsilon/2$

då $n > N_{\varepsilon/2}$. Med stöd av (1.28) fås då för $n > N_{\varepsilon/2}$ att $|z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Alltså $z_n \to z_0$ då $n \to \infty$. $\square$

Om $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \neq \infty$ och $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0 \neq \infty$, där $\{z_n\}$ och $\{w_n\}$ är talföljder i $\mathbb{C}$, så gäller följande räkneregler

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z_0 + w_0\,, \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = z_0 \cdot w_0\,, \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}(c\,z_n) = c\,z_0\,, \quad c \in \mathbb{C}\,, \tag{2.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{z_n}{w_n}) = \frac{z_0}{w_0}\,, \quad w_0 \neq 0\,. \tag{2.4}$$

Bevisen av räknereglerna (2.1) – (2.4) för gränsvärden är analoga med motsvarande bevis i reell analys, och lämnas som övningsuppgifter.

Definition 2.2. En talföljd $\{z_n\}$ säges vara en *Cauchy-följd* om

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : n, m > N_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon\,. \tag{2.5}$$

Det är bekant från Analys I att en reell talföljd är konvergent om och endast om den är en Cauchy-följd. Vi utnyttjar detta faktum i beviset av nästa sats.

Sats 2.3. $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \neq \infty$ *om och endast om* $\{z_n\}$ *är en Cauchy-följd.*

Bevis: 1. $(\Rightarrow)$ Antag att $z_n \to z_0 \neq \infty$ då $n \to \infty$. Tag $\varepsilon > 0$. Då finns det ett $N_{\varepsilon/2}$ sådant att $|z_n - z_0| < \varepsilon/2$ för $n > N_{\varepsilon/2}$. Tag $n, m > N_{\varepsilon/2}$. Då gäller

$$|z_n - z_m| = |(z_n - z_0) + (z_0 - z_m)| \leq |z_n - z_0| + |z_m - z_0| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

Därmed är $\{z_n\}$ en Cauchy-följd.

2. $(\Leftarrow)$ Vi betecknar $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Tag $\varepsilon > 0$. Antag att det finns ett $N_\varepsilon > 0$ så att $|z_n - z_m| < \varepsilon$ såsnart $n, m > N_\varepsilon$. Då gäller med stöd av (1.27) att $|x_n - x_m| < \varepsilon$ och $|y_n - y_m| < \varepsilon$ då $n, m > N_\varepsilon$. Då nu $\{x_n\}$ och $\{y_n\}$ är reella Cauchy-följder så existerar reella $x_0, y_0 \neq \infty$ sådana att $x_n \to x_0$ och $y_n \to y_0$ då $n \to \infty$. Sats 2.2 ger att $\lim_{n\to\infty} z_n = x_0 + iy_0 = z_0 \neq \infty$. $\square$

Ett metriskt rum kallas **fullständigt** om varje Cauchy-följd konvergerar mot någon punkt i rummet. Således är $\mathbb{C}$ **ett fullständigt metriskt rum**.

Slutna mängder kan karakteriseras med hjälp av konvergenta följder, vilket preciseras i följande sats.

Sats 2.4. *En mängd $M \subseteq \mathbb{C}$ är sluten om och endast om varje konvergent följd i M konvergerar mot någon punkt i M.*

Bevis: 1. $(\Rightarrow)$. Antag att M är sluten. Låt $\{z_n\}$ vara en konvergent följd med $z_n \in M$ för alla n, och $z_n \to z_0 \neq \infty$ då $n \to \infty$. Vi skall visa att $z_0 \in M$. Tag $\varepsilon > 0$. Eftersom $\{z_n\}$ konvergerar mot z_0 finns det en punkt z_n i följden sådan att $z_n \in D(z_0, \varepsilon)$. Eftersom ε är godtyckligt vald innebär detta att $z_0 \in \overline{M}$. Då nu M är sluten gäller $M = \overline{M}$, alltså $z_0 \in M$.

2. $(\Leftarrow)$. Vi anför ett indirekt bevis. Antag att M inte är sluten. Då kan vi välja ett $z_0 \in \overline{M}$ sådant att $z_0 \notin M$. Nu gäller $z_0 \in \overline{M} \Rightarrow D(z_0, 1/n)$ innehåller en punkt $z_n \in M$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Följden $\{z_n\}$ är då en följd i M och för givet $\varepsilon > 0$ gäller att $n > 1/\varepsilon \Rightarrow |z_0 - z_n| < \varepsilon$, alltså $z_n \to z_0 \notin M$ då $n \to \infty$. Därmed har vi visat att om varje konvergent följd i M konvergerar mot en punkt i M, så är M sluten. □

Bolzano-Weierstrass' sats utsäger den viktiga egenskapen hos $\mathbb{R}$ att man ur varje begränsad oändlig reell talföljd kan utplocka en konvergent delföljd. Detta gäller även i $\mathbb{C}$.

Sats 2.5. *Ur varje oändlig och begränsad talföljd $\{z_n\}$ i $\mathbb{C}$ kan utplockas en konvergent delföljd.*

Bevis: Övningsuppgift. □

Definition 2.3. Låt M vara en icke-tom delmängd av $\mathbb{C}$. Då definieras *diametern* av M, beteckning $\operatorname{diam} M$ genom

$$\operatorname{diam} M := \sup\{|x - y| : x, y \in M\}. \tag{2.6}$$

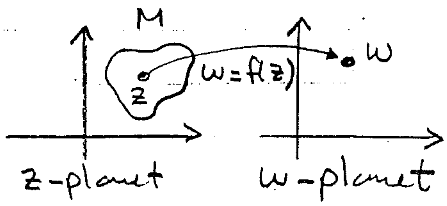
Exempel 2.1. Låt $M = \{z : |z| < 1\}$. Då är $\operatorname{diam} M = 2$.

Sats 2.6. *(Cantors sats) Låt $M_1, M_2, M_3, \ldots$ vara en följd $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ av icke-tomma slutna mängder i $\mathbb{C}$ sådana att $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \ldots$. Antag vidare att $\operatorname{diam} M_n \to 0$, då $n \to \infty$. Då består $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ av exakt en punkt.*

Bevis: Låt satsens antaganden gälla. Vi bildar en följd $\{z_n\}$ sådan att för varje n gäller att $z_n \in M_n$. Tag $\varepsilon > 0$. Då finns ett $N_\varepsilon > 0$ sådant att $n > N_\varepsilon \Rightarrow \operatorname{diam} M_n < \varepsilon$, ty $\operatorname{diam} M_n \to 0$. Vidare gäller att $n, m > N > N_\varepsilon \Rightarrow z_n, z_m \in M_N \Rightarrow |z_n - z_m| < \operatorname{diam} M_N < \varepsilon$. Alltså är $\{z_n\}$ en

Cauchy-följd och därmed konvergent enligt Sats 2.3. För $n > N$ gäller att $z_n \in M_N$ som är en sluten mängd. Då fås med stöd av Sats 2.4 att följden $\{z_n\}$ konvergerar mot $z_0 \in M_N$. Punkten $z_0 \in M_n$ för alla $n = 1, 2, ..., N$, eftersom $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ ... \ \supseteq M_N$. Välj godtyckligt heltal $k > N$. Då måste $z_0 \in M_k$, ty delföljden $\{z_n\}_{n=k}^{\infty}$ tillhör M_k och konvergerar mot z_0. Alltså $z_0 \in M_n$ för alla n, vilket då medför att $z_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} M_n$. Antag att även w_0 tillhör snittet $\cap_{n=1}^{\infty} M_n$. Då gäller att $|z_0 - w_0| < \operatorname{diam} M_n$ för alla n. Men $\operatorname{diam} M_n \to 0$, vilket medför att $z_0 = w_0$ måste gälla. Alltså innehåller snittet exakt en punkt z_0. □

Definition 2.4. Låt $M \subseteq \mathbf{C}$. En funktion f som tillordnar varje $z \in M$ ett komplext tal $w = f(z)$, kallas en *komplexvärd funktion* av en komplex variabel z. Mängden M kallas f :s *definitionsmängd.*

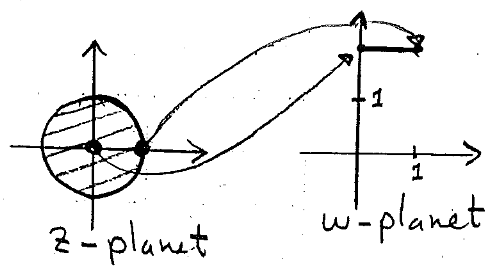


Låt $z = x + iy$ och $w = u + iv$, där x, y, u, v är reella. Då blir u och v reella funktioner, $u(x, y)$ och $v(x, y)$, av x och y. Vi kan då skriva

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i\, v(x, y)\,, \tag{2.7}$$

där u och v kallas f :s *reella* respektive *imaginära del.*

Exempel 2.2. Beskriv värdemängden för funktionen $f(z) = x^2 + 2i$, $z = x + iy$, då definitionsmängden är $M = \{z : |z| \leq 1\}$.
Lösning: Vi har realdelen $u(x, y) = x^2$ som varierar mellan 0 och 1 för $z \in M$. Imaginära delen är konstant, $v(x, y) \equiv 2$. Därmed fås att M avbildas på $\{w : w = u + 2i,\ 0 \leq u \leq 1\}$.



Definition 2.5. Antag att M är definitionsmängd för funktionen f och att $z_0 \in \overline{M}$. Funktionen f har *gränsvärdet* $a \in \mathbb{C}$ när $z \to z_0$, om för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$, sådant att

$$(z \in M \text{ och } |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon\,. \tag{2.8}$$

Vi betecknar detta $\lim_{z\to z_0} f(z) = a$ eller $f(z) \to a$ då $z \to z_0$.

Anmärkning 1: Om $z_0 \in M$ så gäller $a = f(z_0)$.
Anmärkning 2: För att visa att f **inte** har ett gränsvärde i $z_0 \in \overline{M}$ räcker det att hitta två följder $\{z_n\}$ och $\{w_n\}$ i M sådana att $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 = \lim_{n\to\infty} w_n$, men $\lim_{n\to\infty} f(z_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(w_n)$.

Exempel 2.3. Visa att funktionen $f(z) = z/\overline{z}$, $z \neq 0$, inte har något gränsvärde i $z_0 = 0$.

Lösning: Ser att $z_0 \in \overline{M}$. För reellt z gäller $z = \overline{z}$, alltså $f(z) = 1$ på reella axeln utom i $z = 0$. För rent imaginärt $z = iy$ gäller $z = -\overline{z}$, och $f(z) = -1$ på imaginära axeln, utom i $z = 0$. Därmed existerar inte gränsvärdet i $z_0 = 0$.

Definition 2.6. Vi säger att f har *gränsvärdet* a i punkten ∞, beteckning $\lim_{z\to\infty} f(z) = a$ eller $f(z) \to a$ då $z \to \infty$, om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett positivt tal k sådant att

$$|z| \geq k \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon\,. \tag{2.9}$$

Med $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ avser vi att för varje $k > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| \geq k\,. \tag{2.10}$$

Antag att $\lim_{z\to z_0} f(z) = a \neq \infty$ och $\lim_{z\to z_0} g(z) = b \neq \infty$. Då erhålls följande räkneregler

$$\lim_{z\to z_0} (f(z) \pm g(z)) = a \pm b\,, \tag{2.11}$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \cdot g(z) = a \cdot b\,, \tag{2.12}$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a}{b}\,, \quad b \neq 0\,. \tag{2.13}$$

Bevisen är analoga med de som anförs i reell analys.

Sats 2.7. *Låt $f(z) = u(x,y)+i\,v(x,y)$, $z = x+i\,y$. Då gäller att $\lim_{z\to z_0} f(z) = a = \alpha + i\,\beta$ om och endast om*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \quad \textit{och} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \beta\,. \tag{2.14}$$

Bevis: Övningsuppgift. □

Vi övergår nu till att behandla kontinuerliga funktioner och antar att $z_0 \in M$.

Definition 2.7. Funktionen f är *kontinuerlig i punkten* $z_0 \in M$ om $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Om f är kontinuerlig i varje punkt av sin definitionsmängd M så säges f vara *kontinuerlig*. Med andra ord är f kontinuerlig i punkten $z_0 \in M$ om och endast om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$(z \in M \ \textit{och}\ |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,. \tag{2.15}$$

Med stöd av (2.11), (2.12) och (2.13) får vi då att om f och g är kontinuerliga i $z_0 \in M_f \cap M_g$ så är $f \pm g$ och $f \cdot g$ kontinuerliga i z_0. Om $g(z_0) \neq 0$ så är även kvoten f/g kontinuerlig i z_0.

För att utröna om f är kontinuerlig kan vi separat studera reella och imaginära delen av f.

Sats 2.8. *Låt $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $z = x + i\,y$. Då är f kontinuerlig i punkten $z_0 = x_0 + i\,y_0$ om och endast om både $u(x,y)$ och $v(x,y)$ är kontinuerliga i punkten (x_0, y_0).*

Bevis: Påståendet följer ur definitionen på kontinuitet och Sats 2.7. □

En komplexvärd funktion f som är definierad på mängden M är *begränsad* om och endast om $\sup\{|f(z)| : z \in M\} < \infty$.

Sats 2.9. *Om den komplexvärda funktionen f är kontinuerlig på en kompakt mängd M så är den begränsad på mängden. Vidare antar $|f|$ ett största och ett minsta värde på M.*

Bevis: Antag som antites att f inte är begränsad på M. Då existerar en följd $\{z_n\}$ i M sådan att $|f(z_n)| > n$, $n = 1, 2, \ldots$. Då M är begränsad är även föjden $\{z_n\}$ begränsad. Då ger Sats 2.5 att vi kan utplocka en konvergent delföljd $\{z_{n_i}\}$ som konvergerar mot z_0. Då M är sluten så gäller enligt Sats 2.4

att $z_0 \in M$. Då f är kontinuerlig i M gäller det att $f(z_{n_i}) \to f(z_0)$ då $i \to \infty$, men detta strider mot konstruktionen av följden $\{z_n\}$ och därmed är antitesen falsk. Alltså är f begränsad på M. Låt nu det reella talet K ges av $K := \sup\{|f(z)| : z \in M\}$. Då kan vi konstruera en följd $\{y_n\}$ i M sådan att $|f(y_n)| \to K$ då $n \to \infty$. vidare kan vi utplocka en konvergent delföljd $\{y_{n_i}\}$ som konvergerar mot $y_0 \in M$. För $z, z_0 \in M$ gäller $||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)|$, vilket medför att även $|f(z)|$ är en kontinuerlig funktion i M. Då gäller $K = \lim_{i\to\infty} |f(y_{n_i})| = |f(y_0)|$, och $|f|$ antar ett största värde på M. (Att ett minsta värde antas bevisas analogt). □

2.2 Deriverbarhet och analytiska funktioner

I detta avsnitt undersöker vi deriverbarheten för komplexvärda funktioner och påvisar den starka kopplingen för en analytisk funktion mellan reella delen $u(x, y)$ och imaginära delen $v(x, y)$ via Cauchy-Riemanns differentialekvationer.

Definition 2.8. Låt $f(z)$ vara en komplexvärd funktion som är definierad i en omgivning av punkten z_0. *Derivatan* av f i punkten z_0 definieras genom

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{2.16}$$

ifall gränsvärdet existerar och är olika ∞.

Anmärkning: Gränsvärdet i (2.16) måste existera och vara lika oberoende av i vilken riktning vi närmar oss punkten z_0.

I analogi med reell analys har vi att deriverbarhet medför kontinuitet.

Sats 2.10. *Om den komplexvärda funktionen f är deriverbar i en punkt z_0, så är den kontinuerlig i punkten.*

Bevis: För $z \neq z_0$ gäller

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) \to f'(z_0) \cdot 0 = 0, \text{ då } z \to z_0.$$

Alltså $f(z) \to f(z_0)$, då $z \to z_0$, och därmed är f kontinuerlig i z_0. □

Följande deriveringsregler bevisas på samma sätt som de motsvarande reella deriveringsreglerna. Bevisen lämnas som övningsuppgifter. Om f och

g är deriverbara i punkten z_0, så gäller

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)\,, \tag{2.17}$$

$$(cf)'(z_0) = cf'(z_0)\,, \quad c \in \mathbb{C}\,, \tag{2.18}$$

$$(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)\,, \tag{2.19}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}\,, \quad g(z_0) \neq 0\,, \tag{2.20}$$

$$\frac{d}{dz} f(g(z))\Big|_{z=z_0} = f'(g(z_0))g'(z_0)\,, \quad \text{om } f'(g(z_0)) \text{ existerar}\,. \tag{2.21}$$

Formel (2.21) kallas *kedjeregeln.*

Exempel 2.4. Visa att $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$ för alla positiva heltal n.
Lösning: Med beteckningen $\triangle z = z - z_0$ och med hjälp av binomialsatsen formar vi om differenskvoten,

$$\begin{aligned}
\frac{(z_0 + \triangle z)^n - z_0^n}{\triangle z} &= \frac{\left(\binom{n}{0} z_0^n + \binom{n}{1} z_0^{n-1}\triangle z + \ldots + \binom{n}{n}(\triangle z)^n\right) - z_0^n}{\triangle z} \\
&= n z_0^{n-1} + \binom{n}{2} z_0^{n-2}\triangle z + \ldots + (\triangle z)^{n-1} \\
&\to n z_0^{n-1}\,, \quad \text{då } \triangle z \to 0\,.
\end{aligned}$$

Alltså gäller $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$ för alla positiva heltal n och alla $z \in \mathbb{C}$.

Exempel 2.5. Med stöd av föregående exempel och formlerna (2.17) och (2.18) fås att varje polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

är deriverbart i hela $\mathbb{C}$ och derivatan ges av

$$p'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \ldots + 2a_2 z + a_1\,.$$

Med stöd av (2.20) fås att varje rationell funktion är deriverbar i sin definitionsmängd, dvs. i hela $\mathbb{C}$ med nämnarens nollställen undantagna.

Definition 2.9. En komplexvärd funktion f är *analytisk* i den öppna mängden M om f är deriverbar i varje punkt av M. En funktion f är *analytisk i punkten* z_0 om f är deriverbar i någon cirkelskiva $D(z_0, r)$. Om f är analytisk i hela $\mathbb{C}$ så kallas f en *hel funktion.*

Anmärkning 1: Med stöd av Exempel 2.5 inses att varje polynom är en hel funktion.
Anmärkning 2: Om f är deriverbar på en mängd M som saknar inre punkter, t.ex. ett linjestycke i $\mathbf{C}$, så är f inte analytisk i M.

Definition 2.10. Funktionerna $u(x,y)$ och $v(x,y)$, som är avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$, säges satisfiera *Cauchy-Riemanns differentialekvationer* i punkten (x_0, y_0) om deras partiella derivator i punkten existerar och det gäller att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \mathit{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.22}$$

i punkten (x_0, y_0).

Att en funktion f är deriverbar i en punkt innebär en stark bindning mellan funktionens reella och imaginära del. Vi skall påvisa att denna bindning ges av Cauchy-Riemanns differentialekvationer.

Antag att $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $z = x + iy$, är deriverbar i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$. Då måste gränsvärdet av differenskvoten vara lika oberoende av i vilken riktning vi närmar oss z_0.

1. Låt $y = y_0$, $z = x + iy_0$. Vi närmar oss z_0 horisontalt längs linjen $y = y_0$.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0) + i\,v(x,y_0) - (u(x_0,y_0) + i\,v(x_0,y_0))}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = u'_x(x_0,y_0) + i\,v'_x(x_0,y_0)\,.\end{aligned} \tag{2.23}$$

2. Låt $x = x_0$, $z = x_0 + iy$. Vi närmar oss z_0 vertikalt längs linjen $x = x_0$.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y) + i\,v(x_0,y) - (u(x_0,y_0) + i\,v(x_0,y_0))}{x_0 + iy - (x_0 + iy_0)} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{y - y_0} + \lim_{y\to y_0} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{y - y_0} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) - i\,u'_y(x_0,y_0)\,.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Nu kan vi identifiera reella och imaginära delarna i (2.23) och (2.24) och erhåller därmed att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textit{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

gäller i punkten (x_0, y_0). Alltså har vi bevisat följande sats.

Sats 2.11. *Om den komplexvärda funktionen f, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, är deriverbar i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$, så uppfylls Cauchy-Riemanns differentialekvationer i punkten (x_0, y_0). Därmed gäller: Om f är analytisk i en öppen mängd M så gäller Cauchy-Riemanns differentialekvationer i varje punkt i M. Vidare gäller för $(x_0, y_0) \in M$ att*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \left(= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right). \qquad (2.25)$$

Exempel 2.6. Visa att funktionen $f(z) = (x^2 + y) + i\,(y^2 - x)$ inte är analytisk i någon punkt.
Lösning: $u(x,y) = x^2 + y$ och $v(x,y) = y^2 - x$. Då gäller

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \ \text{ och } \ \frac{\partial v}{\partial x} = -1\,.$$

Alltså gäller CR-differentialekvationer enbart på linjen $y = x$, och därmed inte i någon cirkelskiva. Då kan inte f vara analytisk i någon punkt i $\mathbb{C}$. (Ty om f vore analytisk i $z_0 \in \mathbb{C}$, så skulle CR-differentialekvationer gälla i någon cirkelskiva $D(z_0, r)$.)

Att u och v uppfyller CR-differentialekvationer i en punkt (x_0, y_0) garanterar inte att f är deriverbar i punkten $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Vi måste också kräva att de partiella derivatorna av u och v existerar i en öppen omgivning av z_0 och är kontinuerliga i z_0.

Sats 2.12. *Låt $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ vara definierad i en öppen mängd M som innehåller punkten $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Om de partiella derivatorna u'_x, u'_y, v'_x och v'_y existerar i M, "ar kontinuerliga i (x_0, y_0) och uppfyller Cauchy-Riemanns differentialekvationer i (x_0, y_0), då är f deriverbar i punkten z_0. Därmed gäller: Om de partiella derivatorna av första ordning av u och v är kontinuerliga i en öppen mängd M och Cauchy-Riemanns diff.ekvationer gäller i hela M, så är f analytisk i M.*

Bevis: Eftersom M är en öppen mängd och $z_0 \in M$, så kan vi betrakta punkter $z = x + i\,y$ som tillhör en cirkelskiva $D(z_0, r)$ som ligger helt i M, $(D(z_0, r) \subset M)$. Vi bildar differenskvoten

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + i\,(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)}, \tag{2.26}$$

där $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $z = x + iy$ och $z_0 = x_0 + iy_0$.

(1) Betrakta skillnaden $u(x,y) - u(x_0,y_0) = (u(x,y) - u(x_0,y)) + (u(x_0,y) - u(x_0,y_0))$. För fixt y är $u(x,y)$ kontinuerlig i $[x_0,x]$ (eller $[x,x_0]$ om $x_0 > x$), och deriverbar i (x_0,x) (eller (x,x_0) om $x_0 > x$). Medelvärdessatsen ger att det finns ett x^* mellan x och x_0 sådant att $u(x,y) - u(x_0,y) = u'_x(x^*,y)(x - x_0)$. (Här beror x^* av både x och y, $x^* = x^*(x,y)$). Alltså gäller det att

$$u(x,y) - u(x_0,y) = (x - x_0)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x^*,y)\,. \tag{2.27}$$

Då nu u'_x är kontinuerlig i (x_0,y_0), samt $x^*(x,y) \to x_0$ och $y \to y_0$ då $(x,y) \to (x_0,y_0)$, så kan vi skriva

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x^*,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \varepsilon_1,$$

där ε_1 beror av både x och y och $\varepsilon_1 \to 0$ då $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Därmed kan vi skriva (2.27) i formen

$$u(x,y) - u(x_0,y) = (x - x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \varepsilon_1\right), \tag{2.28}$$

där $\varepsilon_1 \to 0$ då $(x,y) \to (x_0,y_0)$. En analog behandling av uttrycket $u(x_0,y) - u(x_0,y_0)$ ger att vi kan skriva

$$u(x_0,y) - u(x_0,y_0) = (y - y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \varepsilon_2\right), \tag{2.29}$$

där $\varepsilon_2 \to 0$ då $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

(2) Omskrivning av täljarens imaginära del i (2.26) ger att $v(x,y) - v(x_0,y_0) = (v(x,y) - v(x_0,y)) + (v(x_0,y) - v(x_0,y_0))$. En med fallet (1) analog behandling ger att

$$\begin{aligned} v(x,y) - v(x_0,y) &= (x - x_0)\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) + \varepsilon_3\right), \\ v(x_0,y) - v(x_0,y_0) &= (y - y_0)\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) + \varepsilon_4\right), \end{aligned} \tag{2.30}$$

där $\varepsilon_3 \to 0$ och $\varepsilon_4 \to 0$ då $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Sammanställning av uttrycken (2.26) - (2.30) ger

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x - x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1 + i\,\frac{\partial v}{\partial x} + i\,\varepsilon_3\right) + (y - y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2 + i\,\frac{\partial v}{\partial y} + i\,\varepsilon_4\right)}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)}, \tag{2.31}$$

där de partiella derivatorna evalueras i punkten (x_0,y_0) och $\varepsilon_i \to 0$, $i = 1,2,3,4$, då $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Med stöd av CR-differentialekvationer formas högerled i (2.31) om till

$$\frac{(x - x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\,(y - y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)} + \frac{\lambda}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)}, \tag{2.32}$$

där $\lambda \equiv (x - x_0)(\varepsilon_1 + i\,\varepsilon_3) + (y - y_0)(\varepsilon_2 + i\,\varepsilon_4)$. Då gäller

$$\begin{aligned} \left|\frac{\lambda}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)}\right| \leq & \left|\frac{x - x_0}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)}\right| |\varepsilon_1 + i\,\varepsilon_3| \\ & + \left|\frac{y - y_0}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)}\right| |\varepsilon_2 + i\,\varepsilon_4| \\ \leq & |\varepsilon_1 + i\,\varepsilon_3| + |\varepsilon_2 + i\,\varepsilon_4| \\ & \to 0, \quad \text{då} \quad (x,y) \to (x_0,y_0)\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Med stöd av (2.26), (2.32) och (2.33) erhålls

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + i\,(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,.$$

Därmed existerar derivatan av f i punkten z_0 och den ges av uttrycket

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + i\, v'_x(x_0, y_0). \quad \square$$

Exempel 2.7. Sats 2.12 ger att funktionen i Exempel 2.6, $f(z) = (x^2 + y) + i\,(y^2 - x)$ där $z = x + iy$, som inte är analytisk i någon punkt i $\mathbb{C}$, är deriverbar i punkter z med $x = y$.

Exempel 2.8. Visa att $f(z) = \mathrm{e}^x \cos y + i\, \mathrm{e}^x \sin y$, där $z = x + iy$, är en hel funktion och bestäm funktionens derivata.
Lösning: Vi har att

$$u'_x = \mathrm{e}^x \cos y, \quad u'_y = -\mathrm{e}^x \sin y, \quad v'_x = \mathrm{e}^x \sin y \quad \text{och} \quad v'_y = \mathrm{e}^x \cos y\,.$$

De partiella derivatorna är kontinuerliga i hela $\mathbb{R}^2$ och uppfyller i varje punkt CR-differentialekvationer. Då är f analytisk i hela $\mathbb{C}$ och därmed en hel funktion. Vi ser att f' ges av

$$f'(z) = u'_x(x, y) + i\, v'_x(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y + i\, \mathrm{e}^x \sin y\,.$$

Alltså gäller $f'(z) = f(z)$ i hela $\mathbb{C}$. (En bra kandidat för en komplex exponentialfunktion ?!).

Exempel 2.9. Låt f vara definierad genom

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{om } |z| < 1\,, \\ 1, & \text{om } |z| > 2\,. \end{cases}$$

Då är $f'(z) \equiv 0$ på f :s definitionsmängd, men f är inte konstant. Definitionsmängden är en öppen mängd, men den är **inte** sammanhängande.

Sats 2.13. *Om f är analytisk i ett område M och om $f'(z) = 0$ i hela M, då är f konstant i M.*

Bevis: Eftersom två godtyckliga punkter i ett område M alltid kan förenas med en bruten linje som ligger helt i M, så räcker det att visa att f är konstant på varje linjestycke L i M. Ett linjestycke L i M kan ges en parameterframställning $z(t) = x(t) + i\, y(t)$, där $x(t) = a\, t + b$ och $y(t) = c\, t + d$,

$0 \le t \le 1$, och a, b, c, d är reella konstanter. Låt $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$. Då är f :s värden på L givna av

$$U(t) + i\,V(t) = u(at+b, ct+d) + i\,v(at+b, ct+d), \quad 0 \le t \le 1\,. \tag{2.34}$$

Med hjälp av kedjeregeln beräknar vi $U'(t)$ och $V'(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = a\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + c\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\,, \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = a\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + c\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\,. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Eftersom $0 = f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + i\,v'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) - i\,u'_y(x_0,y_0)$ för varje $z_0 \in M$ har vi att $u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0$ i hela M. Därmed har vi att $U'(t) = 0$ och $V'(t) = 0$ för $0 \le t \le 1$, vilket medför att $U(t)$ och $V(t)$ är konstanta för $0 \le t \le 1$, dvs. på hela L. Därmed är f konstant på L och i hela M. □

2.3 Harmoniska funktioner

Lösningar $\phi(x,y)$ till Laplace' ekvation

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.36}$$

har viktiga tillämpningar inom potentialteori i fysiken.

Definition 2.11. En reellvärd funktion $\phi(x,y)$ säges vara *harmonisk* i ett område M om alla partiella derivator av andra ordning är kontinuerliga i M och om ϕ är en lösning till Laplace' ekvation (2.36) i hela M.

Sats 2.14. *Om $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ är analytisk i ett område M, så är $u(x,y)$ och $v(x,y)$ harmoniska i M.*

Bevis: Vi skall senare visa att för alla analytiska funktioner gäller att u och v har kontinuerliga partiella derivator av andra ordningen. Vi antar nu att detta är bekant. Under detta antagande vet vi att

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{2.37}$$

Med hjälp av CR-differentialekvationer, (som ju gäller i M), formas ekvationerna i (2.37) om i formen

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$

och därmed är $u(x,y)$ och $v(x,y)$ harmoniska i M. □

Om vi vet att funktionen $u(x,y)$ är harmonisk i ett område M, så kan vi bestämma en annan harmonisk funktion $v(x,y)$ så att $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ är en analytisk funktion i M. Funktionen $v(x,y)$ kallas då det **harmoniska konjugatet** av $u(x,y)$. Proceduren illustreras med ett exempel.

Exempel 2.10. Konstruera en i $\mathbb{C}$ analytisk funktion vars realdel ges av $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$.
Lösning: Vi har att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0\,,$$

alltså är $u(x,y)$ harmonisk i hela talplanet $\mathbb{R}^2$. Nu söker vi en funktion $v(x,y)$ som uppfyller CR-differentialekvationer.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{och} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 1\,. \tag{2.38}$$

Om vi betraktar x som konstant och integrerar med avseende på y i den första ekvationen i (2.38) erhålls

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + \psi(x)\,, \tag{2.39}$$

där $\psi(x)$ är en deriverbar funktion av x. Insättning av (2.39) i den andra ekvationen i (2.38) ger

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \psi'(x) = 6xy - 1\,,$$

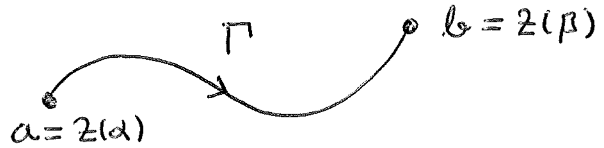
alltså har vi $\psi'(x) = -1$, vilket innebär att $\psi(x) = -x + c$, där c är en reell konstant. Då ges det harmoniska konjugatet av $u(x,y)$ av funktionen

$v(x,y) = 3x^2y - y^3 - x + c$, där c är en reell konstant. Därmed ges den sökta analytiska funktionen f av

$$\begin{aligned} f(z) &= x^3 - 3xy^2 + y + i\,(3x^2y - y^3 - x + c) \\ &= z^3 - i\,(z - c), \quad z = x + iy, \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.4 Kontinuerliga kurvor och konform avbildning

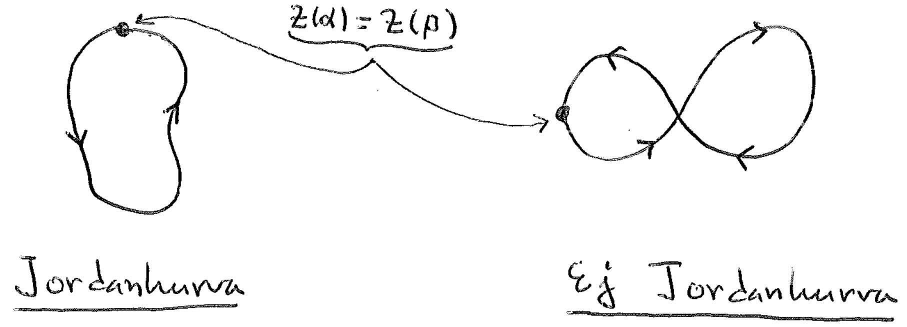
Definition 2.12. Antag att $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ med $\alpha < \beta$. En kontinuerlig funktion $z : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ säges definiera en *kontinuerlig kurva* Γ i $\mathbb{C}$. Γ uppfattas som funktionens värdemängd, $\Gamma = \{z(t) : \alpha \le t \le \beta\}$. Ekvationen $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, kallas kurvans ekvation i *parameterform* med t som parameter. Punkterna $a = z(\alpha)$ och $b = z(\beta)$ kallas kurvans *begynnelsepunkt* respektive *slutpunkt*. Riktningen från a till b kallas kurvans *positiva riktning.*



Anmärkning: Ekvationen $z = z(\alpha + \beta - t)$, $\alpha \le t \le \beta$, representerar samma kurva men genomlöpt i motsatt riktning. Den "motsatta kurvan" betecknas $-\Gamma$.

Exempel 2.11. Exempel på kontinuerliga kurvor:
(1) "Punktkurvan" $z = c(=$ konstant$)$.
(2) Räta linjen $z = z_1 + t\,(z_2 - z_1)$, $-\infty < t < \infty$, genom punkterna z_1 och z_2. Om $0 \le t \le 1$ fås sträckan mellan z_1 och z_2.
(3) Cirkeln $z = z_0 + r(\cos t + i\,\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, med medelpunkten z_0 och radien r.

Definition 2.13. En kurva Γ med ekvationen $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, är *sluten* om $z(\alpha) = z(\beta)$. En sluten kurva som inte skär sig själv är en *Jordankurva.* För en Jordankurva gäller $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ och $t_1 \ne t_2$ medför att $z(t_1) \ne z(t_2)$.



Definition 2.14. Antag att $z : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ är skriven i formen $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, där x och y är reella funktioner av t. Om $x'(t_0)$ och $y'(t_0)$ existerar för $t_0 \in [\alpha, \beta]$, (högerderivatan om $t_0 = \alpha$, vänsterderivatan om $t_0 = \beta$,), så definieras $z'(t_0)$ genom

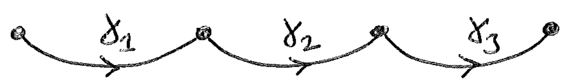
$$z'(t_0) = x'(t_0) + i\,y'(t_0)\,. \tag{2.40}$$

För en reell kurva given av $x = x(t)$, $y = y(t)$, vet vi att kurvan har en väldefinierad tangent i varje punkt t_0 där $x'(t_0) \neq 0$ eller $y'(t_0) \neq 0$. Tangentriktningen ges av vektorn $(x'(t_0), y'(t_0))$. Då $z'(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow (x'(t_0) \neq 0$ eller $y'(t_0) \neq 0)$ så ges tangentriktningen av $\theta = \arg\, z'(t_0)$. Vi har således

Sats 2.15. *Kurvan Γ med ekvationen $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, har en bestämd tangent i varje punkt $z(t_0)$ där $z'(t_0)$ existerar och är olika 0. Tangentens riktningsvinkel är $\theta = \arg\, z'(t_0)$.*

Definition 2.15. Kurvan Γ säges vara *regulär*, om Γ kan framställas genom någon ekvation $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, sådan att $z'(t)$ är kontinuerlig och olika 0 för $\alpha \leq t \leq \beta$.

Om kurvorna $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ är sådana att γ_1 :s slutpunkt sammanfaller med γ_2 :s begynnelsepunkt, γ_2 :s slutpunkt sammanfaller med γ_3 :s begynnelsepunkt osv., så betecknar $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$ den *sammansatta* kurvan $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_n$. En kurva Γ säges vara **styckevis regulär**, om Γ kan framställas i formen $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$, där $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ är reguljära.

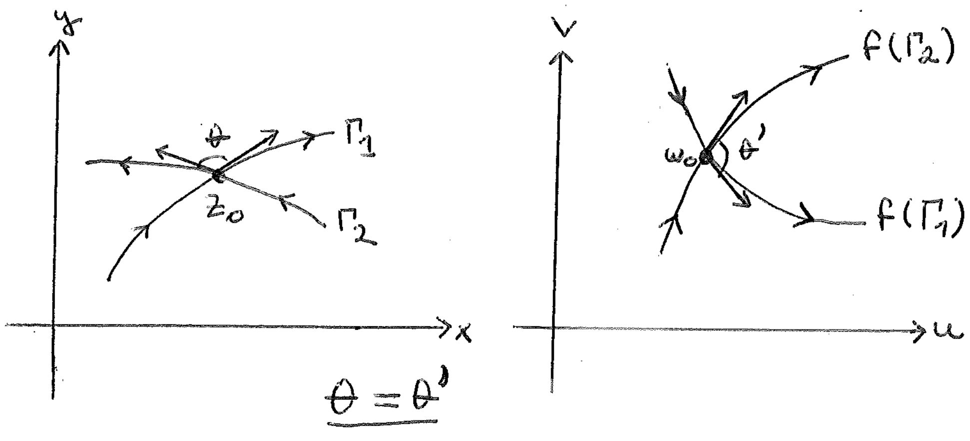


$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

Styckevis regulär

Definition 2.16. Ett område M säges vara *enkelt sammanhängande* om för varje Jordankurva $\Gamma \in M$ gäller att området innanför Γ tillhör M.

Definition 2.17. En avbildning $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ säges vara *konform (vinkeltrogen)* i en punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, om f är kontinuerlig i en omgivning av z_0 och vinkeln mellan två godtyckliga reguljära kurvor genom z_0 är densamma som vinkeln mellan deras bildkurvor i punkten $w_0 = f(z_0)$.



Sats 2.16. *Om f är analytisk i ett område M, så förmedlar f en konform avbildning $w = f(z)$ i varje punkt $z_0 \in M$ där $f'(z_0) \neq 0$.*

Bevis: Låt $z_0 \in M$ och $f'(z_0) \neq 0$. Låt Γ vara en regulär kurva $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ i M och antag att $z_0 = z(t_0)$, $\alpha \leq t_0 \leq \beta$. Vektorn $z'(t_0) \neq 0$ ger då tangentriktningen för Γ i z_0. Γ avbildas av f på en kurva Γ' i w-planet, där Γ' ges av $w = w(t) = f(z(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Vektorn $w'(t_0)$ ger tangentriktningen för Γ' i punkten $w_0 = f(z(t_0))$ om $w'(t_0) \neq 0$. Med stöd av kedjeregeln erhålls då att

$$w'(t_0) = f'(z(t_0))z'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0\,. \qquad (2.41)$$

Argumentet för $w'(t_0)$ bestäms ur (2.41)

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0))\,.$$

Varje regulär kurva Γ genom z_0 har alltså en bildkurva Γ' vars tangentriktning i $w_0 = f(z_0)$ fås genom att rotera tangenten för Γ i punkten z_0 med vinkeln $\arg\left(f'(z_0)\right)$. Denna rotationsvinkel är oberoende av valet av Γ. Avbildningen är konform. □