1 Komplexa talplanet

1.1 Komplexa tal, konjugat och belopp

Den axiomatiskt införda reella talkroppen $\mathbb{R}$ och räkneoperationerna med reella tal antas bekanta. (Se kursen i Analys I, Protter och Morrey: A first course in real analysis).

Definition 1.1. De *komplexa* talen $\mathbb{C}$ definieras som mängden av ordnade reella talpar, $\{(a,b),\ a,b \in \mathbb{R}\}$, med addition och multiplikation definierade genom formlerna

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \tag{1.1}$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)\,. \tag{1.2}$$

Två komplexa tal (a,b) och (c,d) är lika om och endast om $a = c$ och $b = d$.

Låt $z = (a,b)$ och $z_i = (a_i, b_i)$, $i = 1,2,3$, beteckna godtyckliga komplexa tal. Genom att verifiera att de komplexa talen satisfierar nedanstående axiom bevisar man att $\mathbb{C}$ **bildar en talkropp**.

(1) $\mathbb{C}$ är sluten under addition och multiplikation:

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{C} \quad \text{och} \quad z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

(2) Associationslagarna:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad \text{och} \quad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3\,.$$

(3) Kommutationslagarna:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{och} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1\,.$$

(4) $(0,0)$ är det entydigt bestämda neutrala elementet vid addition:

$$\forall\, z \in \mathbb{C} : z + (0,0) = z\,.$$

$(1,0)$ är det entydigt bestämda neutrala elementet vid multiplikation:

$$\forall\, z \in \mathbb{C} : z \cdot (1,0) = z\,.$$

(5) För varje $z \in \mathbb{C}$ finns en entydigt bestämd additiv invers i $\mathbb{C}$, betecknad $-z$, sådan att
$$z + (-z) = (0,0)\,.$$
För varje $z \neq (0,0)$ i $\mathbb{C}$ finns en entydigt bestämd multiplikativ invers i $\mathbb{C}$, betecknad z^{-1}, sådan att
$$z \cdot z^{-1} = (1,0)\,.$$
(Notera att $(z = (a,b) \Rightarrow -z = (-a,-b)$ och $z = (a,b) \Rightarrow z^{-1} = (a/(a^2+b^2), -b/(a^2+b^2))$.

(6) Distributionslagen:
$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3\,.$$

Exempel 1.1. Att det neutrala elementet $(0,0)$ i (4) är entydigt bestämt fås genom att visa att $(0,0)$ är ett neutralt element (lätt), och därefter antar vi att $(a,b) \in \mathbb{C}$ är ett neutralt element för addition. Då erhåller vi med hjälp av (4) och (3) att
$$(a,b) = (a,b) + (0,0) = (0,0) + (a,b) = (0,0)\,.$$
Att den additiva inversen i (5) för $z \in \mathbb{C}$ är entydigt bestämd fås genom att antaga att $z + z_1 = (0,0)$ och $z + z_2 = (0,0)$, varvid (2), (3) och (4) ger att
$$\begin{aligned} z_1 &= z_1 + (0,0) = z_1 + (z + z_2) = (z_1 + z) + z_2 = (z + z_1) + z_2 \\ &= (0,0) + z_2 = z_2 + (0,0) = z_2\,. \end{aligned}$$

Vi skall nu införa **skillnad** och **kvot** för komplexa tal. För godtyckliga tal (a,b) och (c,d) har ekvationen
$$(c,d) + (x,y) = (a,b)$$
en entydigt bestämd lösning (x,y) i $\mathbb{C}$, ty med stöd av (1.1) fås att ekvationen är ekvivalent med att $c + x = a$ och $d + y = b$, vilket är ekvivalent med att $x = a - c$ och $y = b - d$. Vi inför då **skillnaden** mellan (a,b) och (c,d) som den entydigt bestämda lösningen till ekvationen, dvs
$$(a,b) - (c,d) = (a - c, b - d)\,. \tag{1.3}$$

Om vi nu antar att (a,b) och (c,d) är godtyckliga komplexa tal med $(c,d) \neq (0,0)$ så har ekvationen

$$(c,d) \cdot (x,y) = (a,b)$$

en entydigt bestämd lösning i $\mathbb{C}$, ty med stöd av (1.2) fås att ekvationen är ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}$$

som på grund av att $c^2 + d^2 \neq 0$ har den entydigt bestämda lösningen

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \quad \text{och} \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,.$$

Vi inför kvoten mellan (a,b) och (c,d), då $(c,d) \neq (0,0)$, som den entydigt bestämda lösningen till ovanstående ekvation,

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} := \Big(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\Big), \quad \text{då } (c,d) \neq (0,0)\,. \tag{1.4}$$

Låt nu $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ beteckna den delmängd av $\mathbb{C}$ som ges av

$$\mathbb{C}_{\mathbb{R}} := \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}\,.$$

Då är $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ sluten under addition, multiplikation, subtraktion och kvotbildning, ty med stöd av (1.1), (1.2), (1.3) och (1.4) gäller det för godtyckliga $(a,0), (b,0) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ att

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0) \tag{1.5}$$

$$(a,0) \cdot (b,0) = (ab,0) \tag{1.6}$$

$$(a,0) - (b,0) = (a-b,0) \tag{1.7}$$

$$\frac{(a,0)}{(b,0)} = \big(\frac{a}{b},0\big), \quad b \neq 0\,. \tag{1.8}$$

Då uppfyller $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ axiomen för en talkropp i (1)–(6) ovan, och är därmed en **delkropp av** $\mathbb{C}$. Om vi definierar en bijektiv avbildning $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ genom

$$\forall a \in \mathbb{R} : f(a) = (a,0)\,, \tag{1.9}$$

så följer det av (1.5) och (1.6) att f är en isomorfi mellan $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Vi kan därför identifiera $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ med $\mathbb{R}$ och skriver i fortsättningen a istället för $(a, 0)$. Vi kan därmed betrakta $\mathbb{R}$ som en **delkropp** av $\mathbb{C}$, samt $\mathbb{C}$ som en utvidgning av den reella talkroppen $\mathbb{R}$. Nu införs beteckningen

$$i := (0, 1)\,, \tag{1.10}$$

varvid (1.2) ger att $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0) = -1$. Vi får alltså sambandet

$$i^2 = -1\,. \tag{1.11}$$

Låt $z = (a, b)$ vara ett godtyckligt komplext tal. Då erhålls

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + i \cdot b$$

I fortsättningen används beteckningssättet

$$z = a + ib \tag{1.12}$$

för det komplexa talet $z = (a, b)$, varvid i kallas **imaginära enheten**, a kallas **reella delen** av z, beteckning $a = \operatorname{Re} z$, och b kallas **imaginära delen** av z, beteckning $b = \operatorname{Im} z$. Nu kan formlerna (1.1), (1.2), (1.3) och (1.4) skrivas i formen

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)\,, \tag{1.13}$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)\,, \tag{1.14}$$

$$(a + ib) - (c + id) = a - c + i(b - d)\,, \tag{1.15}$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}, \quad c^2 + d^2 \neq 0\,. \tag{1.16}$$

Formlerna (1.13) – (1.16) erhålls genom att tillämpa de vanliga räknelagarna för reella tal och beakta att $i^2 = -1$. Formel (1.16) fås enklast genom förlängning med nämnarens konjugattal:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,.$$

Exempel 1.2. Om $z \in \mathbb{C}$ och $b \in \mathbb{R}$ så gäller

$$z^2 + b^2 = (z + ib)(z - ib)\,.$$

Därmed har ekvationen $z^2 + b^2 = 0$ alltid två rötter, $z = \pm ib$, i $\mathbb{C}$.

Definition 1.2. Låt $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, vara ett godtyckligt komplext tal. Talets *absolutbelopp* eller *modul* betecknas $|z|$ och definieras genom

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{1.17}$$

Konjugattalet till z, betecknat $\overline{z}$, definieras genom

$$\overline{z} = a - ib\,. \tag{1.18}$$

I följande sats sammanställs några räkneregler för konjugattal och absolutbelopp.

Sats 1.1. *Låt z, z_1 och z_2 vara godtyckliga komplexa tal. Då gäller*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2\,, \tag{1.19}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2\,, \tag{1.20}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2\,, \tag{1.21}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\,, \quad z_2 \neq 0\,, \tag{1.22}$$

$$Re\,z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad och \quad Im\,z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})\,, \tag{1.23}$$

$$|z| = |\overline{z}| \quad och \quad |z|^2 = z \cdot \overline{z}\,, \tag{1.24}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|\,, \tag{1.25}$$

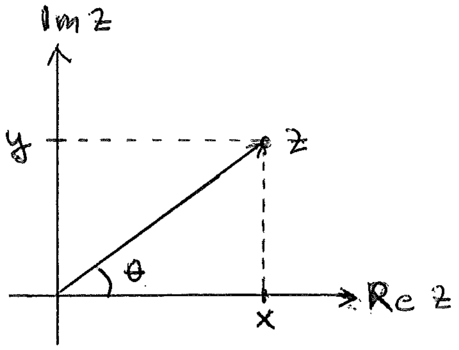
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,, \quad z_2 \neq 0\,. \tag{1.26}$$

Bevis: Beviset lämnas som övningsuppgift. □

Notera med stöd av (1.23) att $z \in \mathbb{C}$ är reellt om och endast om $z = \overline{z}$.

1.2 Komplexa talplanet

Ur definitionen på komplexa tal följer att $z \in \mathbb{C}$ kan representeras entydigt som en punkt $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ i ett rätvinkligt, tvådimensionellt koordinatsystem. Det komplexa talet $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, representeras då av punkten (x, y) i ett koordinatsystem där x-axeln och y-axeln kallas den **reella** respektive **imaginära** axeln.



Talet z kan även tolkas som vektorn från origo till punkten (x, y). Om längden av denna vektor betecknas med r noterar vi med stöd av (1.17) att $r = |z|$. Då vi tolkar $|x|$ och $|y|$ som längden av kateterna och $|z|$ som längden av hypotenusan i en rätvinklig triangel erhålls olikheterna

$$|x| = |\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{och} \quad |y| = |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \tag{1.27}$$

$$|z| \leq |x| + |y| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|\,. \tag{1.28}$$

Den vinkel θ som vektorn $z \neq 0$ bildar med den positiva x-axeln kallas z:s **argument**, beteckning $\arg z$. Argumentet är bestämt på en additiv multipel av 2π när. Nu gäller för $z \neq 0$ att

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{|z|}\,, \\ \sin\theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{|z|}\,. \end{aligned} \tag{1.29}$$

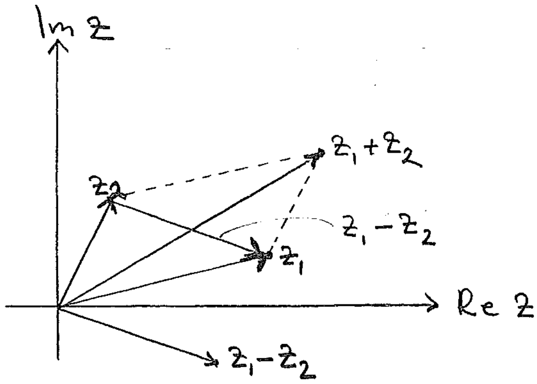
Med beaktande av att $r = |z|$ fås ur (1.29) den **polära framställningen** av talet $z = x + i\,y$,

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,. \tag{1.30}$$

Vidare erhålls ur (1.29) formlerna

$$\begin{aligned} \arg z &= \arctan \frac{y}{x}, & \text{då } x > 0\,, \\ \arg z &= \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{då } x < 0\,. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Vi skall nu ge räkneoperationerna mellan komplexa tal en grafisk tolkning i det komplexa talplanet.



På grund av (1.1) inses att additionen $z_1 + z_2$ av två komplexa tal kan tolkas som vektoraddition i $\mathbb{R}^2$. Vidare har vi att $z_2 + (z_1 - z_2) = z_1$, så skillnaden $z_1 - z_2$ representeras av den vektor som utgår från z_2:s ändpunkt och utsträcker sig till z_1:s ändpunkt. Vi kan alltså tolka $|z_1 - z_2|$ som **avståndet** mellan z_1 och z_2. Det är då naturligt att införa följande definition.

Definition 1.3. *Avståndet* mellan de komplexa talen $z_1 = x_1 + i\,y_1$ och $z_2 = x_2 + i\,y_2$ betecknas $d(z_1, z_2)$ och definieras genom formeln

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,. \tag{1.32}$$

Exempel 1.3. Den origocentrerade cirkeln med radien r utgörs av $\{z \in \mathbb{C} : d(z, 0) = |z| = r\}$. Cirkeln med medelpunkten $z_0 \in \mathbb{C}$ och radien r ges av $\{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) = |z - z_0| = r\}$.

Ur ovanstående figur kan vi grafiskt utläsa att $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Detta bör verifieras analytiskt,

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \\
&= z_1\,\overline{z}_1 + z_1\,\overline{z}_2 + z_2\,\overline{z}_1 + z_2\,\overline{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + z_1\,\overline{z}_2 + \overline{(z_1\,\overline{z}_2)} + |z_2|^2 \qquad (\overline{\overline{z}} = z) \\
&= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\,\overline{z}_2) + |z_2|^2 \\
&\le |z_1|^2 + 2\,|z_1\,\overline{z}_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2 .
\end{aligned}$$

Alltså gäller $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Vidare inses, eftersom $|-z| = |z|$, att $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$. Man kan också visa att $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2|$, (övningsuppgift). Vi sammanfattar utredningarna i **triangelolikheten**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : ||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2| . \tag{1.33}$$

Med fullständig induktion kan högra olikheten i (1.33) generaliseras i formen

$$|z_1 \pm z_2 \pm \cdots \pm z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| . \tag{1.34}$$

Definition 1.4. En icke-tom mängd M försedd med en avbildning $d_M : M \times M \to \mathbb{R}$ som uppfyller axiomen

$$\begin{aligned}
&(1)\ \forall\ x, y \in M : d_M(x,y) \ge 0 \ \ \textit{och}\ \ d_M(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\
&(2)\ \forall\ x, y \in M : d_M(x,y) = d_M(y,x), \\
&(3)\ \forall\ x, y, z \in M : d_M(x,z) \le d_M(x,y) + d_M(y,z),
\end{aligned}$$

kallas ett *metriskt rum*, beteckning (M, d_M), och d_M kallas en *metrik.*

Exempel 1.4. De komplexa talen $\mathbb{C}$ med d definierad enligt (1.32) är ett metriskt rum, $(\mathbb{C}, d)$. Axiomen (1) och (2) är lätta att verifiera. Vidare gäller för $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ att

$$\begin{aligned}
d(z_1, z_3) &= |z_1 - z_3| = |(z_1 - z_2) + (z_2 - z_3)| \\
&\le |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) .
\end{aligned}$$

Därmed är axiom (3) uppfyllt.

Avslutningsvis skall vi grafiskt tolka multiplikation och division av komplexa tal. Betrakta två komplexa tal $z_1, z_2 \neq 0$ givna i polär form, $z_j = r_j\,(\cos\theta_j + i\,\sin\theta_j)$, $j = 1, 2$. Vi erhåller då

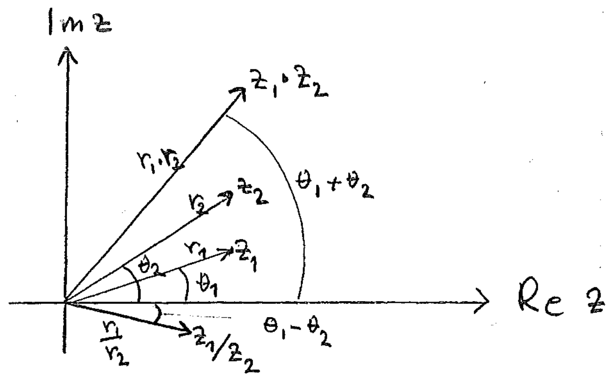
$$\begin{aligned} w = z_1 \cdot z_2 &= r_1\,r_2\,(\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1)\,(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2) \\ &= r_1\,r_2\,[(\cos\theta_1\,\cos\theta_2 - \sin\theta_1\,\sin\theta_2) + i\,(\sin\theta_1\,\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\sin\theta_2)] \\ &= r_1\,r_2\,(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2)), \end{aligned}$$

eller med andra ord

$$|w| = |z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, \tag{1.35}$$

$$\arg w = \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2\,. \tag{1.36}$$

Två tal i $\mathbb{C}$ multipliceras så, att **modulerna multipliceras** och **argumenten adderas.**



Om vi betraktar kvoten $w = z_1/z_2$ och skriver den som $z_1 = w \cdot z_2$, så ger (1.35) och (1.36) att $|z_1| = |w|\,|z_2|$ och $\arg z_1 = \arg w + \arg z_2$. Alltså gäller

$$|w| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,, \tag{1.37}$$

$$\arg w = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2\,. \tag{1.38}$$

Två tal i $\mathbb{C}$ divideras så, att **modulerna divideras** och **argumenten subtraheras.**

1.3 Moivres formel, potenser och rötter

Låt $z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) \neq 0$ vara ett godtyckligt tal i polär form. Upprepad användning av (1.35) och (1.36) ger oss

$$\begin{aligned} z &= r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,, \\ z^2 &= r^2\,(\cos 2\theta + i\,\sin 2\theta)\,, \\ z^3 &= r^3\,(\cos 3\theta + i\,\sin 3\theta)\,, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Genom fullständig induktion bevisas formeln

$$z^n = [r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)]^n = r^n\,(\cos n\theta + i\,\sin n\theta), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.39}$$

Speciellt för $r = 1$ kallas (1.39) **Moivres formel,**

$$(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\,\sin n\theta\,, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.40}$$

För $z \neq 0$ och n ett positivt heltal definieras $z^{-n} := (z^{-1})^n$.

Exempel 1.5. Beräkna $(\sqrt{2}+i\,\sqrt{2})^4$. **Lösning:** Vi noterar att $|\sqrt{2}+i\,\sqrt{2}| = 2$ och att $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vi får då med stöd av (1.39) att

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + i\,\sqrt{2})^4 &= \left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^4 = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 \\ &= 2^4\,(\cos\pi + i\,\sin\pi) = -16\,. \end{aligned}$$

Exempel 1.6. Uttryck $\cos 3\theta$ och $\sin 3\theta$ med hjälp av potenser av $\cos\theta$ och $\sin\theta$. **Lösning:** Moivres formel med $n = 3$ ger

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i\,\sin 3\theta &= (\cos\theta + i\,\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + i\,3\cos^2\theta\,\sin\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta - i\,\sin^3\theta \\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta) + i\,(3\cos^2\theta\,\sin\theta - \sin^3\theta)\,. \end{aligned}$$

Identifiering av reella och imaginära delen ger formlerna

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\,, \\ \sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\,\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\,. \end{aligned}$$

Definition 1.5. Ett tal $z \in \mathbb{C}$ är en *n:te rot* av det komplexa talet w om

$$z^n = w\,, \tag{1.41}$$

där $n > 0$ är ett heltal. $w^{1/n}$ betecknar mängden av alla n:te rötter av w.

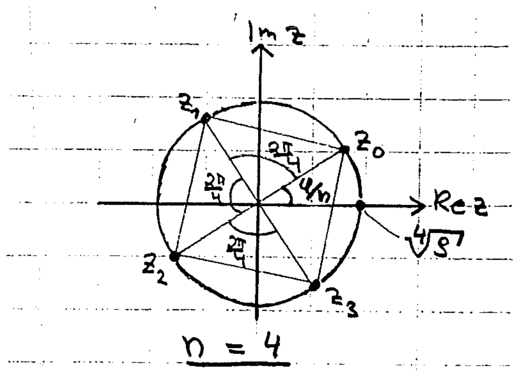
Vi skall nu söka alla lösningar till ekvationen (1.41) och ansätter därför $z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ och $w = \rho\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \neq 0$. Då gäller

$$r^n\,(\cos n\theta + i\,\sin n\theta) = \rho\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = |w|\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,,$$

vilket ger $r^n = \rho > 0$ och $n\theta = \varphi + k\cdot 2\pi$ för heltaligt k. Vi erhåller

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\,2\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\,2\pi}{n}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.42}$$

Man ser att (1.42) ger precis n stycken **olika** n:te rötter z_k svarande mot $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Dessa z_k:n bildar hörn i en regelbunden n-hörning inskriven i cirkeln $|z| = \sqrt[n]{\rho}$. Fallet $n = 4$ illustreras i nedanstående figur.



Vi får då formeln

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\,2\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k\,2\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, \ldots, n-1\,, \tag{1.43}$$

för n:te rötterna av w. Betrakta speciellt fallet $w = 1$. Då fås de n:te **enhetsrötterna** ε_k,

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{k\,2\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{k\,2\pi}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1\,, \tag{1.44}$$

svarande mot en regelbunden n-hörning inskriven i enhetscirkeln $|z| = 1$ med $\varepsilon_0 = 1$. Om vi sätter $w_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$, svarande mot $k = 1$ i (1.44), får vi med stöd av Moivres formel att

$$\varepsilon_k = w_n^k, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{1.45}$$

och observerar att (1.43) kan skrivas i formen

$$z_k = z_0\, \varepsilon_k = z_0\, w_n^k, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{1.46}$$

Exempel 1.7. Beräkna $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{1/3}$. **Lösning:** Vi omskriver $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ i den polära formen $2\,(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})$. Då har vi med stöd av (1.43) lösningen

$$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{1/3} = \left\{ \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ k = 0, 1, 2 \right\}.$$

1.4 Delmängder av komplexa talplanet

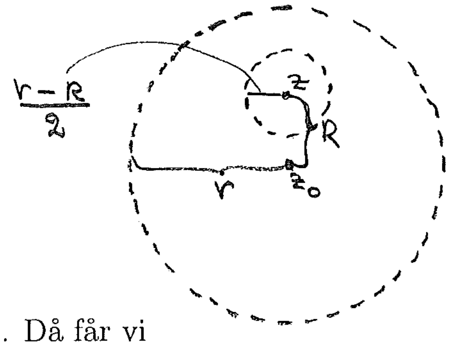
I detta avsnitt införs begreppen cirkelskiva, inre punkt, randpunkt, höljepunkt och hopningspunkt som hjälpmedel för klassificering av delmängder av $\mathbb{C}$. Viktiga delmängder är bland annat öppna och slutna mängder, områden och konvexa mängder.

Definition 1.6. Mängden av punkter innanför cirkeln $|z - z_0| = r > 0$, kallas en cirkelskiva med radie r och medelpunt z_0, $z_0 \in \mathbb{C}$, och betecknas $D(z_0, r)$.

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < r\} = \{z \in \mathbf{C} : d(z, z_0) < r\}. \tag{1.47}$$

Låt M vara en godtycklig mängd i $\mathbb{C}$ och antag att $z \in M$. Om det finns en cirkelskiva $D(z, r)$ sådan att $D(z, r) \subseteq M$ så är z en *inre punkt* av M. Mängden av alla inre punkter av M betecknas M°. Klart att $M^\circ \subseteq M$.

Exempel 1.8. Visa att $D^\circ(z_0, r) = D(z_0, r)$. **Bevis:** Klart att $D^\circ(z_0, r) \subseteq D(z_0, r)$. Tag godtyckligt $z \in D(z_0, r)$. Sätt $R := |z - z_0|$. Då gäller $R < r$ (se figur).



Tag godtyckligt $z' \in D(z, (r-R)/2)$. Då får vi

$$|z' - z_0| = |(z'-z) + (z - z_0)| \leq |z'-z| + |z-z_0| < \frac{r-R}{2} + R < r\,.$$

Alltså gäller $D(z, (r-R)/2) \subseteq D(z_0, r)$, så z är en inre punkt i $D(z_0, r)$. Då gäller $D(z_0, r) \subseteq D^\circ(z_0, r)$ och därmed är $D^\circ(z_0, r) = D(z_0, r)$. □

Definition 1.7. En punkt $z \in \mathbb{C}$ kallas *randpunkt* för mängden M om för varje $r > 0$ gäller att $D(z, r)$ innehåller minst en punkt ur M och minst en punkt ur komplementet av M, $(\mathbb{C} \setminus M)$. Mängden av alla randpunkter för M betecknas ∂M.

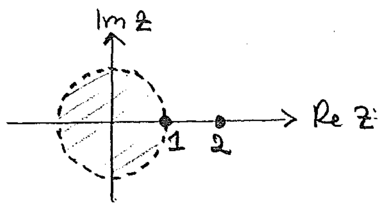
Exempel 1.9. $\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = r\}$.

Definition 1.8. En punkt $z \in \mathbb{C}$ kallas *höljepunkt* för mängden M om varje cirkelskiva $D(z, r)$ innehåller någon punkt ur M. (z duger om $z \in M$). Mängden av M:s höljepunkter betecknas $\overline{M}$. Klart att $M \subseteq \overline{M}$. En punkt $z \in \mathbb{C}$ kallas *hopningspunkt* för mängden M om varje cirkelskiva $D(z, r)$ innehåller någon från z skild punkt ur M. Mängden av M:s hopningspunkter betecknas M'. Klart att $M' \subseteq \overline{M}$.

Anmärkning: Om z är en hopningspunkt för mängden M så innehåller varje cirkelskiva $D(z, r)$ oändligt många punkter ur M.

Exempel 1.10. Låt $M = \{z : |z| < 1\} \cup \{1\} \cup \{2\}$. Bestäm ∂M, M°, $\overline{M}$ och M'. **Lösning:**

$$\begin{aligned} M^\circ &= \{z : |z| < 1\}\,, \\ \partial M &= \{z : |z| = 1\} \cup \{2\}\,, \\ \overline{M} &= \{z : |z| \leq 1\} \cup \{2\}\,, \\ M' &= \{z : |z| \leq 1\}\,. \end{aligned}$$



Exempel 1.11. Om M är en mängd i det komplexa talplanet så gäller följande samband, där vi med CM betecknar komplementet till M med avseende på $\mathbb{C}$, $CM := \mathbb{C} \setminus M$.

(1) $\partial M \cap M^\circ = \emptyset$, vilket följer ur definitionerna 1.6 och 1.7.

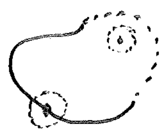
(2) $M^\circ \cup \partial M = \overline{M}$, ty $z \in M^\circ \cup \partial M \Leftrightarrow (z \in M^\circ$ eller $z \in \partial M) \Leftrightarrow D(z,r) \cap M \neq \emptyset$ för alla $r > 0 \Leftrightarrow z \in \overline{M}$.

(3) $M \cup \partial M = \overline{M}$, ty $\overline{M} = M \cup \overline{M} = M \cup (M^\circ \cup \partial M) = (M \cup M^\circ) \cup \partial M = M \cup \partial M$.

(4) $\partial M = \overline{M} \cap \overline{CM}$, ty $z \in \partial M \Leftrightarrow \forall r > 0 : (D(z,r) \cap M \neq \emptyset) \wedge (D(z,r) \cap CM \neq \emptyset) \Leftrightarrow z \in \overline{M} \wedge z \in \overline{CM} \Leftrightarrow z \in \overline{M} \cap \overline{CM}$.

Definition 1.9. En mängd M är en *omgivning* av punkten $z \in \mathbf{C}$ om och endast om det finns en cirkelskiva $D(z,r)$ sådan att $D(z,r) \subseteq M$. Om punkten z utesluts ur omgivningen M, kallas den en *punkterad omgivning* av z. Om en mängd M utgör omgivning till alla sina punkter säger vi att M är en *öppen mängd.*

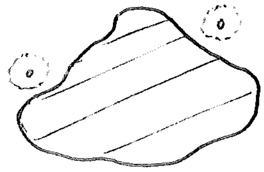
M öppen



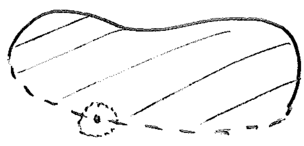
M ej öppen

För en öppen mängd M gäller $M = M^\circ$, den består alltså av idel inre punkter. Med stöd av Exempel 1.8 gäller det att varje cirkelskiva $D(z_0, r)$ är en öppen mängd

Definition 1.10. En mängd M är *sluten* om och endast om CM (komplementet av M) är en öppen mängd.



M sluten



M ej sluten

Sats 1.2. *För en godtycklig delmängd M av $\mathbb{C}$ gäller*

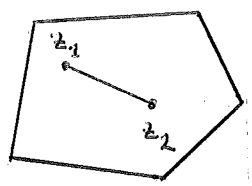
$$M = \overline{M} \Leftrightarrow M \text{ är sluten } \Leftrightarrow \partial M \subseteq M\,.$$

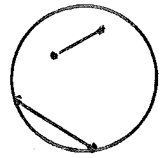
Bevis: 1) M är sluten $\Leftrightarrow$ CM är en öppen mängd $\Leftrightarrow$ $\forall z \in CM\ \exists r > 0:$ $D(z,r) \subseteq CM \Leftrightarrow (z \in CM \Rightarrow z \notin \overline{M}) \Leftrightarrow \overline{M} \subseteq M \Leftrightarrow M = \overline{M}$.

2) Med stöd av ovanstående och Exempel 1.11 punkt (3), får vi att M är sluten $\Leftrightarrow M = \overline{M} \Leftrightarrow M = M \cup \partial M \Leftrightarrow \partial M \subseteq M$. $\square$

Anmärkning: Låt $M = \mathbb{C}$. Då utgör M en omgivning till varje punkt $z \in \mathbb{C}$. Alltså $M^\circ = M$ och $\mathbb{C}$ är en öppen mängd. Eftersom $\partial M = \emptyset$ har vi $\overline{M} = M \cup \partial M = M$ och $\mathbb{C}$ är en sluten mängd. Det komplexa talplanet är både en öppen och en sluten mängd.

Definition 1.11. En mängd M är *begränsad* om och endast om det existerar en reell konstant $k > 0$ sådan att $|z| \leq k$ för alla $z \in M$. Om M är både begränsad och sluten så är M en *kompakt* mängd. En mängd M är *sammanhängande* om två godtyckliga punkter z_1 och z_2 i M alltid kan förenas med en bruten linje som ligger helt i M. En mängd M kallas *konvex* om det för varje val av punkter $z_1, z_2 \in M$ gäller att sträckan mellan z_1 och z_2 ligger helt i M. Om alla punkter på sträckan mellan z_1 och z_2, där z_1 och z_2 undantas, är inre punkter i M så är M *strängt konvex*. Om mängden M är både öppen och sammanhängande, så är M ett *område*.





M öppen, sammanhängande. Ett område.

M konvex, ej strängt konvex.

M strängt konvex.

1.5 Det utvidgade komplexa talplanet

För att kunna hantera talföljder och funktioner som växer obegränsat skall vi utvidga det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ genom att införa en "ideal" punkt betecknad ∞ med egenskapen att punkten ∞ ligger utanför varje cirkel $|z| = r$, oavsett hur stor radien r väljs. Den så erhållna mängden kallas det utvidgade komplexa talplanet och betecknas $\overline{\mathbb{C}}$. Vi har alltså $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Vi definierar följande räkneoperationer för ∞ och $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z + \infty &= \infty + z = \infty\,, \\ z \cdot \infty &= \infty \cdot z = \infty\,, \quad z \neq 0\,, \\ \infty \cdot \infty &= \infty\,, \\ \frac{z}{0} &= \infty\,, \quad z \neq 0\,, \\ \frac{z}{\infty} &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Däremot är $\infty + \infty$ och $0 \cdot \infty$ odefinierade.

Definition 1.12. En mängd $M \subseteq \mathbb{C}$ utgör en *omgivning till* ∞ om M innehåller någon delmängd av formen $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$.

Punkterna i $\overline{\mathbb{C}}$ kan tolkas som punkterna på enhetssfären S i $\mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, se figuren nedan. Låt $N = (0, 0, 1)$ vara "nordpolen" på S. Komplexa talplanet $\mathbb{C}$ identifieras med $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, dvs. $\mathbb{C}$ skär S längs "ekvatorn". För varje $z \in \mathbb{C}$ betraktar vi den räta linjen i $\mathbb{R}^3$ genom z och N. Linjen skär sfären i exakt en punkt $Z \neq N$. Om $|z| = 1$ så gäller $z = Z$, om $|z| > 1$ så ligger Z i "övre halvsfären" och om $|z| < 1$ så ligger Z i "undre halvsfären". Denna projektion ger en bijektiv avbildning av $\mathbb{C}$ på $S \setminus N$. Om vi föreskriver att ∞ avbildas på N får vi en bijektiv avbildning av $\overline{\mathbb{C}}$ på S. Man brukar kalla S för **Riemannsfären**.