8 Residykalkyl

8.1 Laurentserier

Definition 8.1. Med en *Laurentserie* avses en serie av formen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n . \tag{8.1}$$

Serien är konvergent för $z \in \mathbb{C}$, om delserierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad \text{och} \tag{8.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{8.3}$$

bägge konvergerar. Serien (8.2) kallas Laurentseriens *singulära* del och (8.3) dess *regulära del.*

Om man i delserien (8.2) substituerar $w = \frac{1}{z - z_0}$, får man en potensserie i w, som konvergerar i någon cirkelskiva $|w| < \frac{1}{r}$. Därmed konvergerar serien (8.2) för $|z - z_0| > r$. Serien (8.3) konvergerar i någon cirkelskiva av formen $|z - z_0| < R$. Om $r < R$ konvergerar Laurentserien (8.1) i cirkelringen $r < |z - z_0| < R$. **En cirkelring är alltså det typiska konvergensområdet för en Laurentserie.**

Sats 8.1. *Låt $f(z)$ vara en analytisk funktion i den öppna cirkelringen*

$$D = \{z : 0 \leq r < |z - z_0| < R \leq \infty\} .$$

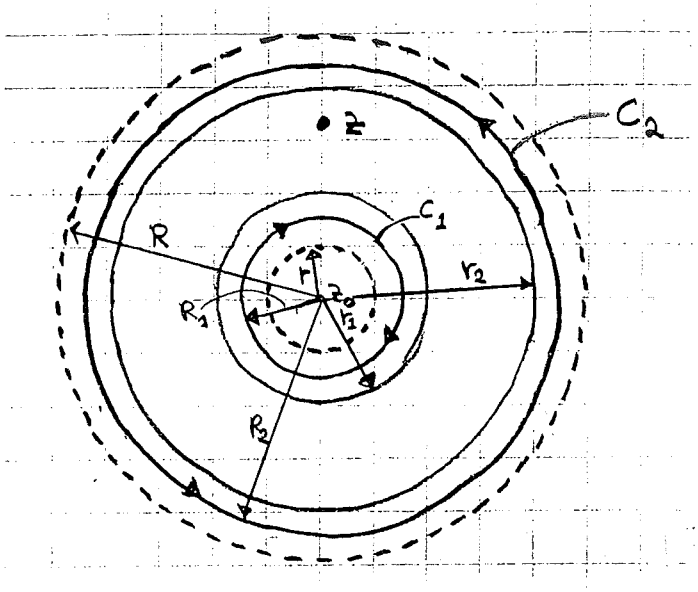
Då kan $f(z)$ i D utvecklas i en Laurentserie

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \ \text{där} \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw , \end{aligned} \tag{8.4}$$

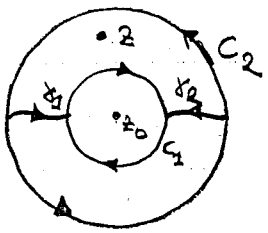
och Γ är en styckevis regulär Jordankurva i D som omsluter punkten z_0. Laurentserien konvergerar likformigt i varje sluten cirkelring

$$D_1 = \{z : r < r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2 < R \leq \infty\} .$$

Bevis: Det räcker att påvisa likformig konvergens i D_1, ty ur detta följer (punktvis) konvergens i D. Låt C_1 vara den negativt orienterade cirkeln $C_1 : |z - z_0| = R_1 = \frac{r+r_1}{2}$ och C_2 den positivt orienterade cirkeln $C_2 : |z - z_0| = R_2 = \frac{R+r_2}{2}$. (Se figur).



Välj $z \in D_1$. Då ligger z i området mellan cirklarna C_1 och C_2 och $f(z)$ är analytisk på C_1 och C_2 och i området mellan cirklarna. Vi förbinder C_1 och C_2 med två regulära kurvor γ_1 och γ_2, så att z ligger innanför den styckevis regulära kurvan $\Gamma = C_2^u + \gamma_1 + C_1^u - \gamma_2$, och Γ' definieras genom $\Gamma' = C_2^l + \gamma_2 + C_1^l - \gamma_1$, där C_1^u och C_2^u är de delar av C_1 och C_2 som ingår i Jordankurvan som omsluter z. C_1^l och C_2^l är de delar av C_1 och C_2 som ingår i den andra Jordankurvan. (Se figur).



Då gäller det att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \text{och} \quad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$$

Om vi adderar vänster- och högerled i ovanstående uttryck erhålls

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\,, \tag{8.5}$$

ty integralerna längs γ_1 och γ_2 tar ut varandra. Vi betecknar:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \text{och} \quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\,. \tag{8.6}$$

Låt $M_2 := \max_{z\in C_2}|f(z)|$. Välj $\varepsilon > 0$. Punkten z ligger innanför cirkeln C_2. Om vi utvecklar $\frac{1}{w-z}$ i en potensserie med rationen $\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)$ får vi som i (7.12) och (7.13) i Sats 7.2 att

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k. \tag{8.7}$$

Serien $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r_2}{R_2}\right)^k$ konvergerar, ty $0 < r_2 < R_2$. Det finns då ett N sådant att $n \geq N$ medför att $\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{r_2}{R_2}\right)^k < \varepsilon$. Då gäller

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|^k \leq \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{r_2}{R_2}\right)^k < \varepsilon\,, \tag{8.8}$$

och (8.8) **gäller för alla** $z \in D_1$ **då** $n \geq N$. Nu kan $f_2(z)$ uppskattas precis som i (7.15) och (7.16). Alltså för $n \geq N$ gäller

$$\left|f_2(z) - \sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\right\}(z-z_0)^k\right| \leq M_2\,\varepsilon\,, \tag{8.9}$$

för alla $z \in D_1$. Därmed konvergerar $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$ **likformigt** mot $f_2(z)$ i $r_1 \leq |z-z_0| \leq r_2$, där $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$.

Nu behandlar vi integralen $f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$. Punkten z ligger utanför C_1, så vi utvecklar $\frac{1}{w-z}$ på följande vis:

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} \\ &= -\frac{1}{z-z_0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{w-z_0}{z-z_0}\Big)^k,\end{aligned} \tag{8.10}$$

ty $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1$. Beteckna $M_1 = \max_{z\in C_1}|f(z)|$ och välj $\varepsilon > 0$. Serien $\sum_{k=0}^{\infty}\big(\frac{R_1}{r_1}\big)^k$ konvergerar, ty $0 < R_1 < r_1$. Då finns det ett N sådant att $n \geq N$ medför att $\sum_{k=n}^{\infty}\big(\frac{R_1}{r_1}\big)^k < \varepsilon$. Då gäller

$$\Big|\sum_{k=n}^{\infty}\Big(\frac{w-z_0}{z-z_0}\Big)^k\Big| \leq \sum_{k=n}^{\infty}\Big|\frac{w-z_0}{z-z_0}\Big|^k \leq \sum_{k=n}^{\infty}\Big(\frac{R_1}{r_1}\Big)^k < \varepsilon\,. \tag{8.11}$$

Uppskattningen (8.11) **gäller för alla** $z \in D_1$. Då kan vi skriva $f_1(z)$ i formen

$$\begin{aligned}f_1(z) =& \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{z-z_0}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{w-z_0}{z-z_0}\Big)^k\Big\}\,dw \\ =& \sum_{k=1}^{n}(z-z_0)^{-k}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-k+1}}\,dw\Big\} \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1}\frac{f(w)}{z-z_0}\Big\{\sum_{k=n}^{\infty}\Big(\frac{w-z_0}{z-z_0}\Big)^k\Big\}\,dw\,.\end{aligned}$$

För $n \geq N$ kan den sista termen uppskattas med

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1}\frac{f(w)}{z-z_0}\Big\{\sum_{k=n}^{\infty}\Big(\frac{w-z_0}{z-z_0}\Big)^k\Big\}\,dw\Big| \\ &\qquad\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-C_1}\Big|\frac{f(w)}{z-z_0}\Big|\,\Big|\sum_{k=n}^{\infty}\Big(\frac{w-z_0}{z-z_0}\Big)^k\Big|\,|dw| \\ &\qquad< \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M_1}{R_1}\cdot\varepsilon\cdot\int_{-C_1}|dw| = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M_1}{R_1}\cdot\varepsilon\cdot 2\pi R_1 \\ &\qquad= M_1\,\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Därmed gäller för alla $z \in D_1$ då $n \geq N$ att

$$\left| f_1(z) - \sum_{k=1}^{n} (z - z_0)^{-k} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-k+1}} \, dw \right\} \right| < M_1 \cdot \varepsilon \, .$$

Då konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$, där $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} \, dw$, **likformigt mot** $f_1(z)$ **i** D_1. Med stöd av (8.5) fås då att

$$\begin{aligned} f(z) = f_1(z) + f_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \, , \end{aligned} \tag{8.12}$$

och **serien konvergerar likformigt mot** $f(z)$ **i** D_1.

Eftersom funktionen $\frac{f(z)}{(z-z_0)^j}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, är analytisk i D kan integralen över C_2 ersättas med integralen över en styckevis regulär kurva Γ i D. Likaledes kan integralen över $-C_1$ ersättas med integralen över samma kurva Γ. Då får vi att

$$c_n = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

i (8.12). Därmed är satsen bevisad. □

Vi skall visa att Laurentserien för $f(z)$ i cirkelringen D i Sats 8.2 är entydigt bestämd. Vi behöver följande hjälpsats, som tillåter termvis integrering av en likformigt konvergerande funktionsserie.

Sats 8.2. *Låt* $\{f_n(z)\}$ *vara en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt mot* $f(z)$ *på en mängd* M. *Antag att* Γ *är en styckevis regulär Jordankurva i* M *med båglängden* L. *Då konvergerar följden* $\left\{ \int_\Gamma f_n(z) \, dz \right\}$ *mot* $\int_\Gamma f(z) \, dz$.

Bevis: Tag $\varepsilon > 0$. Välj N så att $n \geq N \Rightarrow |f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{L}$ för alla $z \in \Gamma$. Då gäller det för $n \geq N$ att

$$\begin{aligned} \left| \int_\Gamma f(z) \, dz - \int_\Gamma f_n(z) \, dz \right| = \left| \int_\Gamma (f(z) - f_n(z)) \, dz \right| &\leq \int_\Gamma |f(z) - f_n(z)| \, |dz| \\ &< \frac{\varepsilon}{L} \cdot \int_\Gamma |dz| = \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon \, . \quad \square \end{aligned}$$

Sats 8.3. Identitetssatsen för Laurentserier. *Antag att $f(z)$ är analytisk i cirkelringen*

$$D = \{z : 0 \leq r < |z - z_0| < R \leq +\infty\}\,.$$

Antag vidare att $f(z)$ i D representeras av två Laurentutvecklingar, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$, där c_n ges av (8.4), och $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$. Då gäller det att $b_n = c_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Bevis: Välj cirkeln $C : |z - z_0| = \frac{1}{2}(R + r)$. Då ligger C i D och båda Laurentserierna konvergerar likformigt mot $f(z)$ på C. Partialsummorna för serien

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\,(z-z_0)^{k-n-1}$$

är kontinuerliga på C och konvergerar likformigt mot funktionen i vänstra ledet. Då kan serien integreras termvis, Sats 8.2, och vi får att

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\int_C b_k\,(z-z_0)^{k-n-1}\,dz\Big)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(b_k\int_C (z-z_0)^{k-n-1}\,dz\Big)\,.\end{aligned} \tag{8.13}$$

Nu är $\int_C (z-z_0)^{k-n-1}\,dz = 2\pi\,i$ om $k = n$ och noll om $k \neq n$, enligt Exempel 6.3. Alltså får vi med stöd av (8.4) och (8.13) att

$$c_n = \frac{1}{2\pi\,i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi\,i}\,(b_n\,2\pi\,i) = b_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Då är den Laurentserie som framställer $f(z)$ i D, och som är utvecklad kring punkten $z = z_0$, entydigt bestämd. □

Exempel 8.1. Utveckla funktionen $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ i Laurentserie i området a) $|z| < 1$, b) $1 < |z| < 2$ och c) $|z| > 2$.
Lösning: Partialbråksuppdelning ger:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\,. \tag{8.14}$$

a) För $|z| < 1$ gäller

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^j = -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{2^{j+1}}, \tag{8.15}$$

och

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{j=0}^{\infty} z^j. \tag{8.16}$$

Med stöd av (8.15) och (8.16) får vi att

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{j+1}}\right)z^j \\ &= \frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\ldots \quad |z|<1.\end{aligned}$$

b) För $1 < |z| < 2$ gäller (8.15), men inte (8.16).

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{z^{j+1}}, \quad |z|>1. \tag{8.17}$$

Alltså får vi att

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{2^{j+1}} - \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{z^{j+1}} \\ &= \ldots -\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\ldots \quad 1<|z|<2.\end{aligned}$$

c) För $|z| > 2$ gäller (8.17), men inte (8.15).

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j}{z^{j+1}}, \quad |z|>2.$$

Vi får därmed att

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j-1}{z^{j+1}} = \frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\ldots, \quad |z|>2.$$

8.2 Isolerade singulariteter

Definition 8.2. Om funktionen $f(z)$ är analytisk i en punkterad omgivning av punkten $z = z_0 \neq \infty$, men inte i z_0, så är $z = z_0$ *isolerad singularitet* för $f(z)$.

Om $f(z)$ har en isolerad singularitet i $z = z_0$ så kan $f(z)$ utvecklas i en Laurentserie av formen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n , \tag{8.18}$$

där serien (8.18) konvergerar i en cirkelring $0 < |z - z_0| < R$. **Tre olika fall kan nu särskiljas:**

(A) Om $c_n = 0$ för alla $n < 0$, så är z_0 en **hävbar singularitet**.
(B) Om $c_{-n} \neq 0$ för ett heltal $n > 0$ och $c_{-j} = 0$ för $j > n$, så är z_0 en **n-faldig pol** för $f(z)$.
(C) Om det finns oändligt många $c_{-n} \neq 0$ för $n > 0$, så är z_0 en **väsentlig singularitet** för $f(z)$.

Fall A. Om z_0 är en hävbar singularitet försvinner Laurentseriens singulära del och serien (8.18) är en potensserie:

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots, \quad 0 < |z - z_0| < R .$$

Om vi definierar $g(z) := f(z)$ i $0 < |z - z_0| < R$ och $g(z_0) = c_0$, så blir $g(z)$ analytisk i $|z - z_0| < R$. Då är $g(z)$ begränsad i en omgivning av z_0, och därmed är även $f(z)$ **begränsad i en punkterad omgivning av z_0**.

Exempel 8.2. Definiera $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$, $|z| > 0$. Om vi sätter $g(z) := f(z)$, $|z| > 0$, och $g(0) = 1$, så är $g(z)$ analytisk i hela $\mathbb{C}$ med

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots, \quad z \in \mathbb{C} .$$

Alltså är $z_0 = 0$ en hävbar singularitet för $f(z)$.

Fall B. Om z_0 är en n-faldig pol antar Laurentserien formen:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1 (z - z_0) + \ldots, \quad 0 < |z - z_0| < R .$$

Nu är $(z-z_0)^n f(z) = c_{-n}+c_{-n+1}(z-z_0)+c_{-n+2}(z-z_0)^2+\ldots, \quad 0 < |z-z_0| < R$. Därmed gäller

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) = c_{-n} \neq 0, \infty\,.$$

Funktionen $(z-z_0)^n f(z)$ har då en hävbar singularitet i z_0. Funktionen $f(z)$ **är obegränsad i en punkterad omgivning av** z_0, $|f(z)| \to \infty$, då $z \to z_0$.

Fall C. Betrakta funktionen $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$. Den är analytisk i $|z| > 0$, och $z_0 = 0$ är en singulär punkt. Laurentserieutvecklingen i $|z| > 0$ ges med hjälp av potensserien för e^z:

$$\mathrm{e}^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots, \quad |z| > 0\,.$$

Alltså är $z_0 = 0$ en väsentlig singularitet för $f(z)$. Det **gäller inte** att $|f(z)| \to \infty$, då $z \to z_0$, för en väsentlig singularitet z_0, utan funktionens beteende i en punkterad omgivning av z_0 är mycket komplicerat. Bland annant gäller föjande sats, som vi inte bevisar.

Sats 8.4. Picards sats. *En analytisk funktion $f(z)$, som har en väsentlig singularitet i punkten $z = z_0$, antar i varje punkterad omgivning av z_0 alla komplexa tal som funktionsvärden, eventuellt med undantag av ett värde.*

Exempel 8.3. Vi verifierar Picards sats för $\mathrm{e}^{1/z}$ i en punkterad omgivning av $z_0 = 0$. Det är klart att $\mathrm{e}^{1/z} \neq 0$ i varje punkterad omgivning av $z_0 = 0$. Låt $c \neq 0$ vara ett godtyckligt valt komplext tal. Välj $\varepsilon > 0$. Det gäller då att

$$\ln c = \ln|c| + i\,\arg c + 2n\pi\,i, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\,.$$

Genom att välja n tillräckligt stort fås ett värde $w = \ln c$ sådant att $|w| > \frac{1}{\varepsilon}$. Sätt $z = \frac{1}{w}$. Då gäller att $|z| < \varepsilon$ och $\mathrm{e}^{1/z} = \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{\ln c} = c$. Alltså gäller Picards sats för $\mathrm{e}^{1/z}$.

Exempel 8.4. Betrakta funktionen $f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$. De singulära punkterna ges av $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\,\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Eftersom $\tan z$ är periodisk med perioden $n\,\pi$ räcker det att undersöka en av de singulära punkterna, de övriga är av samma typ. Vi väljer $z_0 = \frac{\pi}{2}$. Eftersom $|f(z)| \to \infty$,

då $z \to z_0 = \frac{\pi}{2}$, så kan inte z_0 vara en hävbar singularitet eller en väsentlig singularitet. Alltså är $z_0 = \frac{\pi}{2}$ en pol. Sätt $t = z - \frac{\pi}{2}$, $z_0 = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow t_0 = 0$.

$$\tan z = \tan\Big(t + \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\sin\Big(t + \frac{\pi}{2}\Big)}{\cos\Big(t + \frac{\pi}{2}\Big)} = -\frac{\cos t}{\sin t}\,.$$

Då gäller:

$$\lim_{t\to 0} t \cdot \Big(-\frac{\cos t}{\sin t}\Big) = \lim_{t\to 0}\Big(-\cos t\,\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\Big) = -1\,.$$

Alltså

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)\tan z = -1 \neq 0, \infty\,.$$

Därmed har $\tan z$ en enkel pol, (1-faldig pol), i $z_0 = \frac{\pi}{2}$ och även i punkterna $z = \frac{\pi}{2} + n\,\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. På analogt sätt visas att $\cot z$ har enkla poler i $n\,\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exempel 8.5. Undersök singulariteten i $z_0 = 1$ för $\sin z/(z^2-1)^2$.
Lösning: Det gäller att

$$\frac{\sin z}{(z^2-1)^2} = \frac{\sin z}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{\sin(z)/(z+1)^2}{(z-1)^2} = \frac{g(z)}{(z-1)^2}\,.$$

Funktionen $g(z) = \sin z/(z+1)^2$ är analytisk i punkten z_0 och $g(z_0) \neq 0, \infty$. Då erhålls

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1} g(z) \neq 0, \infty\,.$$

Då är singulariteten $z_0 = 1$ en pol av multipliciteten 2.

8.3 Residysatsen

Antag att funktionen $f(z)$ är analytisk på och innanför den regulära Jordankurvan Γ, utom i punkten z_0 innanför Γ. Funktionen kan då utvecklas i en Laurentserie,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n, \quad \text{där } c_n = \frac{1}{2\pi\,i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,.$$

Serien konvergerar i en cirkelring av formen $0 < |z - z_0| < R$. Om vi sätter $n = -1$ i uttrycket för c_n får vi

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi\,i}\int_\Gamma f(z)\,dz\,.$$

Detta ger

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot c_{-1}\,. \tag{8.19}$$

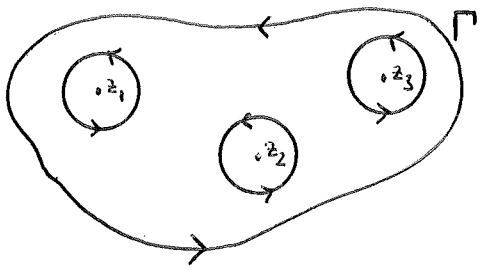
Definition 8.3. Koefficienten c_{-1} i den Laurentutveckling av f, som konvergerar i någon cirkelring av formen $0 < |z - z_0| < R$, kallas f : *s residy, (residyn* av f), i punkten z_0 och betecknas $R(z_0)$, (eller ibland $R_f(z_0)$).

Resultat (8.19) kan då formuleras till satsen:

Sats 8.5. *Om den styckevis regulära Jordankurvan* Γ *omsluter endast en singulär punkt* z_0 *för den annars på och innanför* Γ *analytiska funktionen* $f(z)$*, så gäller*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot c_{-1} = 2\pi i \cdot R(z_0)\,. \tag{8.20}$$

Antag nu att den styckevis regulära Jordankurvan Γ omsluter ett ändligt antal singulära punkter $z_1, z_2, ..., z_n$ för funktionen $f(z)$, som för övrigt antas vara analytisk på och innanför Γ. Varje singulär punkt z_j omslutes med en cirkel C_j så att alla ciklarna hamnar innanför Γ men utanför varandra. Vi genomlöper Γ och cirklarna i positiv omloppsled:



Med stöd av Sats 6.9 gäller

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + ... + \int_{C_n} f(z)\,dz\,.$$

Sats 8.5 ger att $\int_{C_j} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot R(z_j)$, $j = 1, ..., n$. Vi har därmed härlett residysatsen.

Sats 8.6. Residysatsen. *Vi antar att den styckevis regulära Jordankurvan* Γ *omsluter ett ändligt antal singulära punkter* $z_1, ..., z_n$ *för funktionen* $f(z)$*, som för övrigt antas vara analytisk på och innanför* Γ*. Då gäller:*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} R(z_j)\,. \tag{8.21}$$

Om man vill tillämpa residysatsen bör man kunna bestämma f :s residyer i de singulära punkterna. Detta kan göras genom utveckling i Laurentserie kring varje singulär punkt. Ibland kan man använda enklare metoder:

Metod 1. Antag att $f(z)$ har en **enkel pol** i $z = z_0$. Vi utvecklar f i Laurentserie:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots .$$

Alltså gäller

$$(z - z_0) f(z) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots .$$

Då erhålls följande formel för beräkning av $R(z_0)$,

$$R(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) . \tag{8.22}$$

Exempel 8.6. Bestäm residyn för $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z^2+4)}$ i punkterna $z = \pm 2i$.
Lösning: Vi har att $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+2i)(z-2i)}$. Då är $z = \pm 2i$ enkla poler. Formel (8.22) ger:

$$R(2i) = \lim_{z \to 2i} (z - 2i) f(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{z^2}{(z-1)^2(z+2i)} = -\frac{4+3i}{25},$$
$$R(-2i) = \lim_{z \to -2i} (z + 2i) f(z) = \lim_{z \to -2i} \frac{z^2}{(z-1)^2(z-2i)} = -\frac{4-3i}{25} .$$

Vi behandlar nu ett **viktigt specialfall:** Antag att $f(z)$ med en enkel pol i $z = z_0$ kan skrivas i formen

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

där g och h är analytiska i $z = z_0$ och $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$. Då gäller med stöd av (8.22) att

$$R(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} . \tag{8.23}$$

Exempel 8.7. Bestäm residyn för $f(z) = \frac{1}{z^n-1}$ i punkten $z_0 = 1$.
Lösning: Vi har att $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1)$. Då är $z_0 = 1$ en enkel pol för $f(z)$. Nu ger formel (8.23) att

$$R(1) = \frac{1}{\frac{d}{dz}(z^n-1)\big|_{z=1}} = \frac{1}{(nz^{n-1})\big|_{z=1}} = \frac{1}{n1^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

Metod 2. Antag att $f(z)$ har en **pol av n :te ordningen** i punkten $z = z_0$. Utveckling av f i Laurentserie ger:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots .$$

Multiplikation med $(z-z_0)^n$ ger oss att

$$(z-z_0)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + \ldots$$

Nu deriverar vi ovanstående uttryck $(n-1)$ gånger och erhåller

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-z_0)^n f(z)\Big) = (n-1)! \cdot c_{-1} + d_1(z-z_0) + d_2(z-z_0)^2 + \ldots .$$

där $d_1, d_2, \ldots$ är komplexa konstanter. Vi får formeln

$$R(z_0) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-z_0)^n f(z)\Big)\right). \tag{8.24}$$

Exempel 8.8. Bestäm residyn för $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^3}$ i punkten $z_0 = 1$.
Lösning: Punkten z_0 är en pol av ordning 3. Formel (8.24) ger:

$$R(1) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{z^4}\right) = 3.$$

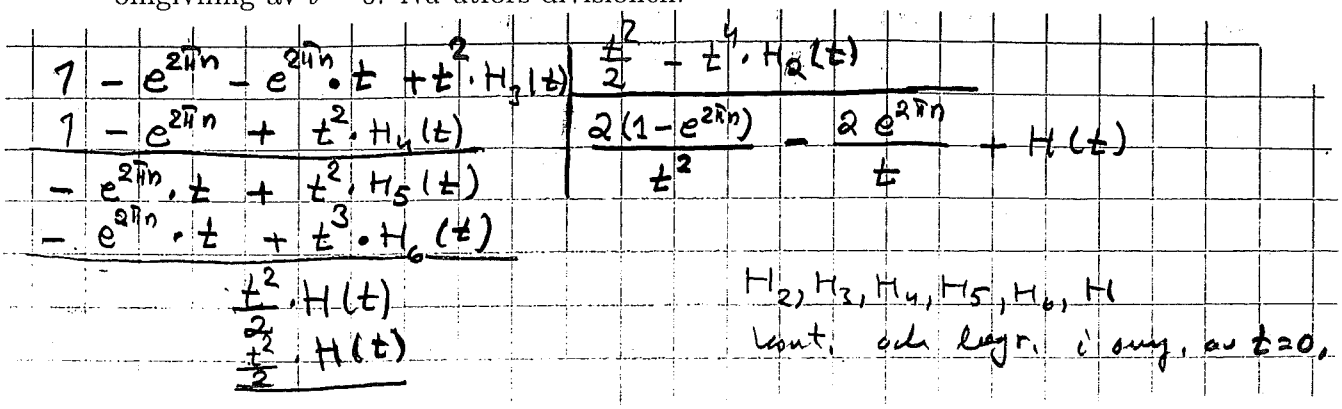
Metod 3. Formell division av serieutvecklingar. Metoden belyses med ett exempel.

Exempel 8.9. Bestäm residyn för $f(z) = \frac{1-e^z}{1-\cos z}$ i alla singulära punkter.
Lösning: De singulära punkterna är $z = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, där $\cos z = 1$. Vi skall nu bestämma residyn i alla punkter på en gång. Sätt: $t = z - 2\pi n$. Då

svarar $z = 2\pi n$ mot $t = 0$. Insättning i uttrycket för $f(z)$ och serieutveckling ger:

$$f(z) = f(t + 2\pi n) = \frac{1 - \mathrm{e}^{t+2\pi n}}{1 - \cos(t + 2\pi n)} = \frac{1 - \mathrm{e}^{2\pi n} \cdot \mathrm{e}^{t}}{1 - \cos t}$$
$$= \frac{1 - \mathrm{e}^{2\pi n}\,(1 + t + t^2\, H_1(t))}{1 - (1 - \frac{t^2}{2} + t^4\, H_2(t))}$$
$$= \frac{1 - \mathrm{e}^{2\pi n} - \mathrm{e}^{2\pi n} t + t^2\, H_3(t)}{\frac{t^2}{2} - t^4\, H_2(t)},$$

där funktionerna $H_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, är kontinuerliga och begränsade i en omgivning av $t = 0$. Nu utförs divisionen:



Då är Laurentutvecklingen av $f(z)$ av formen

$$f(z) = \frac{2(1 - \mathrm{e}^{2\pi n})}{(z - 2\pi n)^2} - \frac{2\mathrm{e}^{2\pi n}}{(z - 2\pi n)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - 2\pi n)^k .$$

Alltså har vi att

$$R(2\pi n) = -2\mathrm{e}^{2\pi n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Vidare ser vi att $z = 0$ är en enkel pol och att $z = 2\pi n$, $n \neq 0$, är poler av ordning 2.

Exempel 8.10. Beräkna $\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+1)}\, dz$, där $C = \{z : |z| = 2\}$.
Lösning: Vi upplöser $z^2(z^2 + 1) = z^2(z + i)(z - i)$. Integranden har en dubbelpol i $z = 0$ och enkla poler i $z = \pm i$. Alla poler ligger innanför C. Vi

tillämpar formlerna (8.22) och (8.24):

$$R(0) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{(2-1)!}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2+1}\right)\right) = \lim_{z\to 0}\frac{e^z(z^2-2z+1)}{(z^2+1)^2} = 1,$$

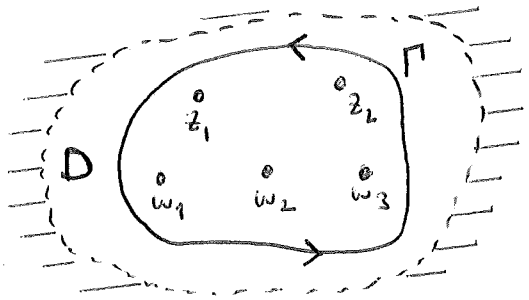
$$R(i) = \lim_{z\to i}\frac{e^z}{z^2(z+i)} = \frac{e^i}{-2i} = -\frac{e^i}{2i},$$

$$R(-i) = \lim_{z\to -i}\frac{e^z}{z^2(z-i)} = \frac{e^{-i}}{2i}.$$

Då får vi med stöd av residysatsen att

$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^z}{z^2(z^2+1)}\,dz &= 2\pi i\,(R(0)+R(i)+R(-i))\\ &= 2\pi i\left(1+\frac{1}{2i}(e^{-i}-e^{i})\right)\\ &= 2\pi i\,(1-\sin 1)\,.\end{aligned}$$

Exempel 8.11. Antag att $h(z)$ är analytisk i ett område D förutom i ett ändligt antal poler. Antag att Γ är en styckevis regulär Jordankurva i D vars inre ligger i D. Antag att Γ omsluter polerna $w_1,\ldots,w_m$ och nollställena $z_1,\ldots,z_n$ för $h(z)$, och att inga poler eller nollställen för $h(z)$ ligger på Γ.



Antag att multipliciteten för nollstället z_j ges av n_j, $j=1,\ldots,n$. Då är

$$h(z) = (z-z_j)^{n_j}\,G_j(z)\,,$$

där $G_j(z)$ är analytisk i en omgivning av z_j och $G_j(z_j)\neq 0$. Då gäller det att

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{n_j}{z-z_j} + \frac{G_j'(z)}{G_j(z)} \Rightarrow R(z_j) = n_j\,,\ \text{för}\ \frac{h'(z)}{h(z)},\ j=1,\ldots,n.$$

Antag att multipliciteten för pol w_j är m_j, $j = 1, \ldots, m$. Då är

$$h(z) = \frac{H_k(z)}{(z - w_k)^{m_k}},$$

där $H_k(z)$ är analytisk i en omgivning av w_k och $H_k(w_k) \neq 0$. Då erhålls

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{-m_k}{z - w_k} + \frac{H_k'(z)}{H_k(z)} \Rightarrow R(w_k) = -m_k\,, \text{för } \frac{h'(z)}{h(z)}\,,\ k = 1, \ldots, m\,.$$

Tillämpning av Residysatsen ger att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{n} n_j - \sum_{k=1}^{m} m_k\,.$$

Följande exempel presenterar en ofta användbar sats för att bestämma antalet nollställen fr en analytisk funktion i ett område D.

Exempel 8.12. Rouche's sats: Antag att $f(z)$ och $g(z)$ är analytiska i ett område D och att Γ är en styckevis regulär Jordankurva i D, vars inre ligger i D. Antag vidare att $f(z)$ och $g(z)$ saknar nollställen på Γ. Om

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| \quad \text{för alla } z \in \Gamma\,,$$

så har $f(z)$ och $g(z)$ lika många nollställen innanför Γ, då multipliciteterna beaktas.

Bevis: Sätt $h(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$. Beteckna med N antalet nollställen för $h(z)$ innanför Γ, vilket sammanfaller med antalet nollställen för $g(z)$ innanför Γ. Beteckna med M antalet poler för $h(z)$ innanför Γ, som då sammanfaller med antalet poler för $f(z)$ innanför Γ. Nu gäller:

$$|h(z) + 1| = \frac{|f(z) + g(z)|}{|f(z)|} < 1\,, \quad \text{för alla } z \in \Gamma\,.$$

Om nu Γ har parameterframställningen $\Gamma : z = z(t),\ \alpha \leq t \leq \beta,\ z(\alpha) = z(\beta)$, så betyder detta att bildkurvan $\Gamma' = h(\Gamma)$ ligger innanför cirkeln $|z + 1| = 1$. Funktionen $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \cdot \arg z\,,\ 0 \leq \arg z < 2\pi$, är analytisk i $|z + 1| < 1$. Med stöd av föregående exempel gäller då

$$\begin{aligned} N - M &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{h'(z(t))}{h(z(t))}\, z'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} \big(\operatorname{Log}(h(z(t)))\big)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \big(\operatorname{Log}(h(z(\beta))) - \operatorname{Log}(h(z(\alpha))) = 0\,. \end{aligned}$$

Därmed har $f(z)$ och $g(z)$ lika många nollställen, med beaktande av multiplicitet, innanför Γ. □

Vi tillämpar Rouche's sats på ett exempel:

Exempel 8.13. Visa att alla nollställen till polynomet $p(z) = 3z^3 - 2z^2 + 2iz - 8$ ligger i cirkelringen $1 < |z| < 2$.
Lsning: På $|z| = 1$ gäller $|p(z)| \geq 8 - |3z^3 - 2z^2 + 2iz| \geq 8 - 7 = 1$. Sätt: $f(z) \equiv 8$. Då saknar p och f nollställen på $|z| = 1$. För $|z| = 1$ gäller $|p(z) + f(z)| = |3z^3 - 2z^2 + 2iz| \leq 3 + 2 + 2 = 7 < 8 = |f(z)|$. Då ger Rouche's sats att p och f har lika många nollställen, dvs. inga, i $|z| < 1$.

Sätt nu $f(z) = -3z^3$. Då har f tre nollställen i $|z| < 2$. På $|z| = 2$ gäller $|p(z)| \geq |3z^3| - |-2z^2 + 2iz - 8| \geq 24 - (2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 8) = 4$, så p och f saknar nollställen på $|z| = 2$. För $|z| = 2$ gäller $|p(z) + f(z)| = |-2z^2 + 2iz - 8| \leq 20 < 24 = |f(z)|$. Då ger Rouche's sats att p och f har lika många nollställen, dvs. tre stycken i $|z| < 2$. Därmed har $p(z)$ alla sina nollställen i cirkelringen $1 < |z| < 2$.

8.4 Beräkning av reella integraler med residykalkyl

Vi skall behandla olika typer av reella integraler som med fördel kan beräknas med residykalkyl.

A. Trigonometriska integraler över $[0, 2\pi]$

Vi skall tillämpa residysatsen på integraler av formen

$$\int_0^{2\pi} U(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta, \tag{8.25}$$

där U är en rationell funktion, med reella koefficienter, av $\cos\theta$ och $\sin\theta$. Vidare antas integranden vara kontinuerlig på intervallet $[0, 2\pi]$. Ett exempel på en sådan integral är

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta}\, d\theta, \quad 0 < b < a\,.$$

Vi skall identifiera (8.25) med en integral $\int_C F(z)\, dz$, där $F(z)$ är en komplex funktion och $C = \{z : |z| = 1\}$. Parametrisera nu C genom $z = z(\theta) =$

$e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Då gäller att

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \text{och} \quad d\theta = \frac{dz}{iz}. \tag{8.26}$$

Eftersom $\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ och $\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$ erhåller vi

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \quad \text{och} \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big). \tag{8.27}$$

Därmed kan (8.25) omskrivas i formen

$$\int_0^{2\pi} U(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \int_C F(z)\, dz, \tag{8.28}$$

där

$$F(z) \equiv U\Big(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big) \cdot \frac{1}{iz}. \tag{8.29}$$

Således har vi överfört (8.25) på en komplex integration över enhetscirkeln.

Exempel 8.14. Beräkna $I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}\, d\theta$.
Lösning: Med stöd av (8.26), (8.27) och (8.28) skriver vi

$$I = \int_C \frac{\Big(\frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big)^2}{5 + 4\Big(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)\Big)} \cdot \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{4i} \int_C \frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z^2+5z+2)}\, dz$$

Integranden $g(z)$ omskrivs i formen

$$g(z) = \frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z^2+5z+2)} = \frac{(z^2-1)^2}{2z^2(z+\frac{1}{2})(z+2)}.$$

Då har $g(z)$ två singulariteter innanför C, punkten $z = 0$ som är en dubbelpol och punkten $z = -\frac{1}{2}$ som är en enkel pol. Vi beräknar residyn i punkten $z = -\frac{1}{2}$,

$$R(-\frac{1}{2}) = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} (z + \frac{1}{2})\, g(z) = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \frac{(z^2-1)^2}{2z^2(z+2)} = \frac{3}{4},$$

och i punkten $z = 0$,

$$\begin{aligned} R(0) &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left(z^2 g(z)\right)\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z^2-1)^2}{2z^2+5z+2}\right) \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{(2z^5+5z+2)\,2(z^2-1)\,2z-(z^2-1)^2(4z+5)}{(2z^2+5z+2)^2} \\ &= -\frac{5}{4}\,. \end{aligned}$$

Med stöd av residysatsen beräknar vi värdet på I,

$$I = -\frac{1}{4i}(2\pi i(R(0)+R(-1/2))) = -\frac{\pi}{2}\,(-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Vi noterar avslutningsvis att de singulariteter som integranden $F(z)$ i (8.29) har är poler eller hävbara singulariteter.

B. Generaliserade integraler över $(-\infty,\infty)$

Om den reellvärda funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[0,\infty)$, så definieras

$$\int_0^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,dx,$$

om gränsvärdet existerar. Om $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $(-\infty,0]$ definieras analogt

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx := \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 f(x)\,dx,$$

om gränsvärdet existerar. Om $f(x)$ är kontinuerlig på $(-\infty,\infty)$ definieras

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx &:= \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx, \end{aligned}$$

om gränsvärdena i mellanledet existerar. **Principalvärdet** för integralen över $(-\infty,\infty)$ definieras genom

$$p.v.\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^r f(x)\,dx,$$

då gränsvärdet existerar. Om integralen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existerar så gäller: $p.v.\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Däremot kan $p.v.\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existera fastän den egentliga integralen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ inte existerar.

Exempel 8.15. Beräkna $p.v.\ \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$.
Lösning: Integralen $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ existerar ej, ty gränsvärdena $\lim_{b\to+\infty} \int_0^b x\,dx$ och $\lim_{c\to-\infty} \int_c^0 x\,dx$ saknas. Däremot gäller:

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} x\,dx = \lim_{r\to+\infty} \Big(\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\Big) = 0\,.$$

Vi skall nu med exempel belysa en metod att beräkna $p.v.\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

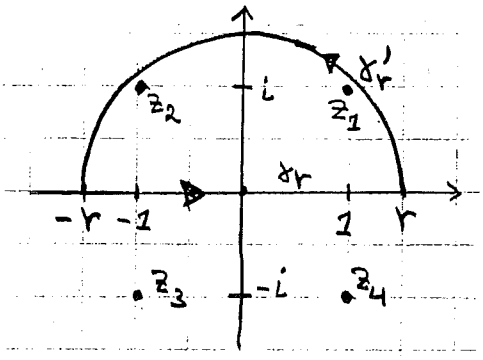
Exempel 8.16. Beräkna $I = p.v.\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+4}$.
Lösning: Vi definierar

$$I_r = \int_{-r}^{r} \frac{dx}{x^4+4}\,, \quad r > 0\,.$$

Då kan I_r tolkas som kurvintegralen

$$I_r = \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z^4+4}\,,$$

där Γ_r är linjestycket från $-r$ till r. Antag att $r > \sqrt{2}$. Vi definierar den styckevis regulära Jordankurvan $\Gamma(r) = \Gamma_r + \Gamma_r'$, där Γ_r' är halvcirkelbågen $z(t) = r\,e^{it}$, $0 \le t \le \pi$.



Den komplexvärda funktionen $f(z)$ ges av

$$f(z) = \frac{1}{z^4+4} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}\,,$$

där $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = -1-i$ och $z_4 = 1-i$. Av dessa punkter ligger z_1 och z_2 innanför $\Gamma(r)$ för alla $r > \sqrt{2}$. Nu är z_1 och z_2 enkla poler med residyerna

$$R(z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\,f(z) = \frac{-1-i}{16},$$
$$R(z_2) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\,f(z) = \frac{1-i}{16}.$$

Residysatsen ger då att för alla $r > \sqrt{2}$ gäller

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(r)} \frac{dz}{z^4+4} &= 2\pi\, i(R(z_1)+R(z_2)) = 2\pi\, i\Big(\frac{-1-i}{16}+\frac{1-i}{16}\Big)\\ &= \frac{\pi}{4}, \quad r > \sqrt{2}.\end{aligned} \tag{8.30}$$

Å andra sidan gäller för $r > \sqrt{2}$ att

$$\int_{\Gamma(r)} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_r} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_r'} f(z)\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{dx}{x^4+4} + \int_{\Gamma_r'} f(z)\,dz. \tag{8.31}$$

Vi skall nu uppskatta $|f(z)|$ på Γ_r' då $r > \sqrt{2}$,

$$|f(z)| = \Big|\frac{1}{z^4+4}\Big| \le \frac{1}{|z^4|-4} = \frac{1}{r^4-4}.$$

Alltså gäller för $r > \sqrt{2}$ uppskattningen

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\Gamma_r'} f(z)\,dz\Big| &\le \int_{\Gamma_r'} |f(z)|\,|dz| \le \frac{1}{r^4-4}\int_{\Gamma_r'} |dz|\\ &= \frac{\pi\, r}{r^4-4} \to 0, \quad \text{då } r\to+\infty.\end{aligned}$$

Men då gäller

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r'} f(z)\,dz = 0. \tag{8.32}$$

Med stöd av (8.30), (8.31) och (8.32) får vi att

$$\int_{-r}^{r}\frac{dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{4} - \int_{\Gamma_r'} f(z)\,dz \to \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{då } r\to+\infty.$$

Alltså har vi att

$$I = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Eftersom $\frac{1}{x^4+4} < \frac{1}{x^4}$ för alla $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$, samt då integralerna $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^4}$, $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ och $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4+4}$ existerar, så existerar även $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+4}$, och då gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Sats 8.7. *Antag att* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, *där* $P(x)$ *och* $Q(x)$ *är polynom sådana att gradtalet*$(Q(x)) \geq$ *gradtalet*$(P(x)) + 2$. *Antag vidare att* $Q(x)$ *saknar nollställen på reella axeln och att* $z_1, z_2, ..., z_n$ *är nollställena för* $Q(z)$ *i halvplanet* $Im\, z > 0$. *Då gäller det att*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi\, i \sum_{j=1}^{n} R(z_j)\,, \tag{8.33}$$

där $R(z_j)$ *är residyn i punkten* z_j, $j = 1, ..., n$.

Bevis: Antag att gradtalen för $P(x)$ och $Q(x)$ är n_1 respektive n_2, och att $n_2 \geq n_1 + 2$. I komplexa talplanet gäller då att

$$\begin{aligned} P(z) &= a_{n_1} z^{n_1} + ... + a_0,\ a_{n_1} \neq 0, \\ Q(z) &= b_{n_2} z^{n_2} + ... + b_0,\ b_{n_2} \neq 0, \end{aligned}$$

samt att

$$\lim_{z\to\infty} \left|\frac{P(z)}{z^{n_1}}\right| = |a_{n_1}| > 0 \quad \text{och} \quad \lim_{z\to\infty} \left|\frac{Q(z)}{z^{n_2}}\right| = |b_{n_2}| > 0\,.$$

För tillräckligt stort $R > 0$ gäller för $|z| \geq R$ att

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\,|a_{n_1}| \leq \left|\frac{P(z)}{z^{n_1}}\right| \leq 2\,|a_{n_1}| \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,|a_{n_1}|\,|z|^{n_1} \leq |P(z)| \leq 2\,|a_{n_1}|\,|z|^{n_1}, \\ &\frac{1}{2}\,|b_{n_2}| \leq \left|\frac{Q(z)}{z^{n_2}}\right| \leq 2\,|b_{n_2}| \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,|b_{n_2}|\,|z|^{n_2} \leq |Q(z)| \leq 2\,|b_{n_2}|\,|z|^{n_2}\,. \end{aligned} \tag{8.34}$$

Låt Γ_r' vara halvcirkelbågen $z = z(t) = r\,e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. (Se Exempel 8.16). För $|z| = r > R$ erhålls uppskattningen

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{2|a_{n_1}|\,r^{n_1}}{\frac{1}{2}\,|b_{n_2}|\,r^{n_2}} \leq 4\left|\frac{a_{n_1}}{b_{n_2}}\right| r^{-2} = \frac{c}{r^2}\,. \tag{8.35}$$

För $r > R$ uppskattas kurvintegralen över Γ_r' av

$$\left|\int_{\Gamma_r'} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| \le \frac{c}{r^2}\int_{\Gamma_r'} |dz| = \frac{c\,\pi\,r}{r^2} = \frac{c\,\pi}{r} \to 0, \quad \text{då } r \to +\infty\,.$$

Integralen $\int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ existerar. För $|x| \ge R$ gäller med stöd av (8.35) att

$$\left|\int_R^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx\right| \le \int_R^\infty \frac{c}{x^2}\,dx \quad \text{och} \quad \left|\int_{-\infty}^{-R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx\right| \le \int_{-\infty}^{-R} \frac{c}{x^2}\,dx\,,$$

alltså existerar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$. Precis som i Exempel 8.16 får vi nu att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi\,i\sum_{j=1}^{n} R(z_j),$$

där $z_1, \ldots, z_n$ är de nollställen för $Q(z)$ som ligger i halvplanet $\operatorname{Im} z > 0$. □

Integraler av formen

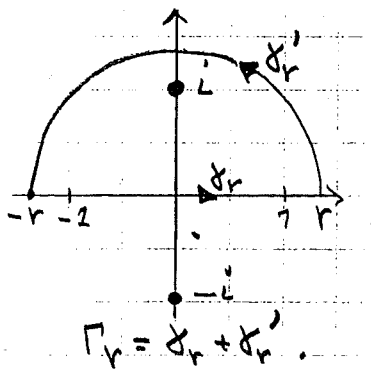
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\sin(mx)\,dx \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cos(mx)\,dx, \quad m > 0,$$

där $P(x)$ och $Q(x)$ är reella polynom och $Q(x)$ saknar nollställen på reella axeln, samt gradtalet för $Q(x) \ge$ gradtalet för $P(x) + 1$, kan beräknas som i följande exempel.

Exempel 8.17. Beräkna $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{1+x^2}\,dx$, där $m > 0$.
Lösning: Här betraktar vi den komplexa integralen

$$\int_{\Gamma(r)} \frac{e^{imz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{e^{imx}}{1+x^2}\,dx + \int_{\Gamma_r'} \frac{e^{imz}}{1+z^2}\,dz, \tag{8.36}$$

där $\Gamma(r)$, Γ_r och Γ_r' har samma betydelse som i Exempel 8.16. Vi låter $r > 1$. Funktionen $\frac{e^{imz}}{1+z^2}$ har en enkel pol, $z_0 = i$, innanför $\Gamma(r)$ då $r > 1$.



Residyn i z_0 ges av

$$R(i) = \lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{\mathrm{e}^{imz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{\mathrm{e}^{-m}}{2i}\,.$$

För $r > 1$ gäller med stöd av Residysatsen att

$$\int_{\Gamma(r)}\frac{\mathrm{e}^{imz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi\,i\,R(i) = \pi\,\mathrm{e}^{-m}\,. \tag{8.37}$$

Vi skall uppskatta den andra integralen i högra ledet av (8.36). Med $z = x + i\,y$ fås för $y \geq 0$ uppskattningen

$$|\mathrm{e}^{imz}| = |\mathrm{e}^{imx-my}| = |\mathrm{e}^{imx}|\,|\mathrm{e}^{-my}| = 1\,\mathrm{e}^{-my} \leq 1, \quad \text{då } m > 0\,.$$

På halvcirkeln Γ_r' gäller

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{imz}}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{r^2-1}, \quad r > 1,\ m > 0\,.$$

Därmed erhålls uppskattningen

$$\left|\int_{\Gamma_r'}\frac{\mathrm{e}^{imz}}{1+z^2}\,dz\right| \leq \frac{\pi\,r}{r^2-1} \to 0, \text{ då } r \to +\infty\,.$$

Med stöd av (8.36) och (8.37) fås då att

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{imx}}{1+x^2}\,dx = \pi\,\mathrm{e}^{-m}\,.$$

Genom att skriva $\mathrm{e}^{imx} = \cos(mx) + i\,\sin(mx)$ och uppdela integralen i

$$\pi\,\mathrm{e}^{-m} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{imx}}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(mx)}{1+x^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(mx)}{1+x^2}\,dx,$$

fås, då vi identifierar real- och imaginärdelar, att

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(mx)}{1+x^2}\,dx = \pi\,\mathrm{e}^{-m} \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(mx)}{1+x^2}\,dx = 0\,.$$

Då nu den första integranden är en jämn funktion, är svaret på vår uppgift

$$\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-m}, \quad m > 0\,.$$

Sats 8.8. *Antag att* $f(x) = g(x)\frac{P(x)}{Q(x)}$, *där* $P(x)$ *och* $Q(x)$ *är reella polynom med gradtalet*$(Q(x)) \geq$ *gradtalet*$(P(x)) + 1$ *och* $Q(x)$ *saknar nollställen på reella axeln. Vidare är* $g(x) = \sin(mx)$ *eller* $g(x) = \cos(mx)$, *där* $m > 0$. *Låt* $z_1, \ldots, z_n$ *vara nollställena för* $Q(z)$ *i halvplanet* $Im\, z > 0$. *Då gäller det att*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(mx)\,\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = Re\left(2\pi\, i \sum_{j=1}^{n} R(z_j)\right), \tag{8.38}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(mx)\,\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = Im\left(2\pi\, i \sum_{j=1}^{n} R(z_j)\right), \tag{8.39}$$

där $R(z_j)$ *är residyn i punkten* z_j, $j = 1, \ldots, n$, *för funktionen* $\mathrm{e}^{imz}\,\frac{P(z)}{Q(z)}$.

Bevis: Låt Γ_r' vara samma halvbåge som i tidigare exempel, $z = z(t) = r\,\mathrm{e}^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Precis som i Exempel 8.17 betraktar vi nu integralen

$$\int_{\Gamma(r)} \mathrm{e}^{imz}\,\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{imx}\,\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \int_{\Gamma_r'} \mathrm{e}^{imz}\,\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\,.$$

Då nu gradtalen för $P(x)$ och $Q(x)$ skiljer sig med minst ett så får vi i analogi med (8.35) för tillräckligt stort R att $|z| = r > R$ ger uppskattningen

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_r'} \mathrm{e}^{imz}\,\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| &= \left|\int_0^\pi \mathrm{e}^{imr(\cos t + i\,\sin t)}\,\frac{P(r\mathrm{e}^{it})}{Q(r\mathrm{e}^{it})}\,i\,r\,\mathrm{e}^{it}\,dt\right| \\
&\leq \frac{c}{r}\,r\int_0^\pi |\mathrm{e}^{-mr\sin t + i\,mr\cos t}|\,dt = c\int_0^\pi \mathrm{e}^{-mr\sin t}\,dt \\
&= 2c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-mr\sin t}\,dt \leq 2c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-mr\frac{2}{\pi}t}\,dt \\
&= 2c\left[\frac{\mathrm{e}^{-mr\frac{2}{\pi}t}}{-mr\frac{2}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{c\,\pi}{mr}\,(1 - \mathrm{e}^{-mr}) \to 0, \quad \text{då } r \to +\infty\,.
\end{aligned}$$

Alltså gäller satsens påstående åtminstone för $p.v.\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

Integralen $\int_{-R}^{R} g(x)\,\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ är konvergent. För att undersöka $\int_{R}^{\infty} g(x)\,\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ och $\int_{-\infty}^{-R} g(x)\,\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ använder vi följande integraltest:

Dirichlets test: Antag att $g(x)$ är kontinuerlig för $x \geq R$, att integralerna $I_c = \int_R^c g(x)\,dx$, $c \geq R$, är begränsade av konstanten K, och att $h(x)$ avtar monotont mot noll då $x \to +\infty$. Då existerar den generaliserade integralen $\int_R^\infty g(x)\,h(x)\,dx$.

Funktionen $g(x)$ i testet är i vårt fall $\sin(mx)$ eller $\cos(mx)$. I båda fallen finns en av c oberoende konstant K sådan att $\left|\int_R^c g(x)\,dx\right| \leq K$ för alla $c > R$. Definiera $h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Då kan vi välja R så stort att $h'(x)$ inte byter tecken för $x \geq R$. Då gäller antingen (1) $h(x)$ avtar monotont mot noll då $x \to +\infty$, i vilket fall $\int_R^\infty g(x)\,h(x)\,dx$ existerar, eller (2) $h(x)$ växer monotont mot noll, i vilket fall $-h(x)$ avtar monotont mot noll då $x \to +\infty$. Alltså existerar $\int_R^\infty g(x)\,(-h(x))\,dx$ och därmed även $\int_R^\infty g(x)\,h(x)\,dx = -\int_R^\infty g(x)\,(-h(x))\,dx$. Alltså existerar $\int_R^\infty g(x)\,\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$. Analogt visas att $\int_{-\infty}^{-R} g(x)\,\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ existerar. □

Anmärkning: Satserna 8.7 och 8.8 kan inte tillämpas om $Q(x)$ har ett nollställe på reella axeln! Dylika exempel behandlas under demonstrationerna.

Referenser

[1] Ahlfors, L.V.: *Complex Analysis*, McGraw - Hill, 1953.
[2] Boas, R.P.: *Invitation to Complex Analysis*, Random House, 1987.
[3] Fisher, S.D.: *Complex Variables,* Wadsworth, 1986.
[4] Gamelin, T.W.: *Complex Analysis,* Springer, 2001.
[5] Nevanlinna, R. och Paatero, V.: *Funktioteoria,* Otava, 1963.
[6] Saff, E.B. och Snider, A.D.: *Fundamentals of Complex Analysis,* Prentice-Hall, 1976.
[7] Sjöberg, B.: *Analytiska funktioner*, Kompendium, Sigma, 1976.