

Demonstrationsuppgifter i Analytiska funktioner till den 16.11.2006

1. Bestäm maximum av $|az^n + b|$ på den slutna cirkelskivan $|z| \leq 1$, då $n > 0$, $a \neq 0$ och a, b är komplexa konstanter.
2. Bestäm maximum av $|z^2 + 3z - 1|$ på $|z| \leq 1$.
3. Bestäm de singulära punkterna till funktionerna

$$a) \quad \frac{1}{e^z - 1} \quad b) \quad \sin\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

och angiv deras karaktär.

4. Utveckla funktionen $f(z) = \frac{2}{z^2 - 4iz - 3}$ i en Laurentserie i cirkelringen $1 < |z| < 3$.
5. Utveckla funktionen $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$ i en Laurentserie i cirkelringen $1 < |z + 2| < 3$.
6. Funktionen f är analytisk för alla z utom $z = 1$, där f har en enkel pol. Vidare är $f(0) = 1$ och $f(2) = 3$, och dessutom är

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 0.$$

Visa att dessa villkor bestämmer f entydigt och ange f .

7. Beräkna integralerna

$$a) \quad \int_C \frac{e^z}{\cos z} dz, \quad b) \quad \int_C \frac{z^4 \sin(\frac{1}{z})}{z^2 - 1} dz,$$

där C är cirkeln $|z| = 2$. (Ledning: Bestäm residyn med hjälp av metod 3. Gör en lämplig substitution i b) fallet).