Demonstrationsuppgifter i Analytiska funktioner till den 9.11.2006

1. Finns det någon på enhetscirkeln $|z| < 1$ analytisk funktion f, sådan att

$$f(\frac{1}{2k}) = \frac{1}{2k} \quad \text{och} \quad f(\frac{1}{2k+1}) = \frac{1}{2k} \quad \text{för} \quad k = 1, 2, 3...?$$

2. Visa med hjälp av Liouvilles sats, att om funktionen f är analytisk i hela det komplexa planet C och om Ref är begränsad, så är f konstant.

3. Låt f vara analytisk i $|z| < 1$ och antag att

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}.$$

Visa att $|f^{(n)}(0)| \leq e\ (n+1)!$.

4. Funktionen $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ är analytisk i $|z| < R$, där $R > 1$. Visa att om $|f(z)| \leq M$ då $|z| = 1$, så har f inga nollställen i området $|z| < \frac{1}{M+1}$.

5. Visa att

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 cos^2 t + b^2 sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab} \quad (a, b > 0)$$

genom att beräkna $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$ längs två olika reguljära Jordankurvor runt origo.

6. Funktionen f är analytisk i hela komplexa planet och det finns tal $M > 0$ och $R > 0$, sådana att

$$|f(z)| \leq M\ |z|^p, \quad |z| \geq R,$$

där $p \in N$. Visa att f är ett polynom av grad $\leq p$.