

Demonstrationsuppgifter i Analytiska funktioner till 2.11.2006

1. Bevisa formlerna (6.6), (6.7) och (6.8) i föreläsningsanteckningarna.
2. Låt $\phi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow C$ vara en kontinuerlig funktion och definiera $g : [c, d] \rightarrow C$ genom

$$g(t) = \int_a^b \phi(s, t) ds.$$

Visa att g är kontinuerlig.

3. Beräkna $\int_0^{2\pi} \bar{z} ds$ längs
 - a) reella axeln från 0 till 2π .
 - b) spiralen $z = t e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
4. Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} |\cos z| |dz|$ längs den brutna linjen $0 \rightarrow \pi/2 \rightarrow \frac{\pi}{2} + i$.

5. Låt C beteckna enhetscirkeln $|z| = 1$. Beräkna integralerna

$$\text{a) } \int_C (z-1) dz, \text{ b) } \int_C (z-1) |dz|, \text{ c) } \int_C |z-1| |dz|, \text{ d) } \int_C |z-1| dz,$$

då C genomlöps ett varv i positiv omloppsled.

6. Gör en uppskattning av

$$\left| \int_C \frac{e^z}{z^2 + 1} dz \right|,$$

där C är cirkeln $|z| = 2$ genomlöst ett varv i positiv omloppsled.

7. Beräkna integralen

$$\int_C \frac{e^z}{z^2 + 1} dz,$$

där cirkeln C genomlöps ett varv i positiv omloppsled och där a) C är cirkeln $|z-1| = 1$, b) C är cirkeln $|z - \frac{1}{2} - i| = 1$.