

Demonstrationsuppgifter i Analytiska funktioner till den 19.10.2004

1. Bevisa formeln $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = e^z$, då $z \in \mathbb{C}$.
2. Bestäm den Möbiustransformation som har en fixpunkt i $z = 1$ och som avbildar området $D_z = \{z : |z| < 1 \text{ och } |z - \frac{1}{4}| > \frac{1}{4}\}$ på en origocentrerad cirkelring med yttre begränsning $|w| = 1$. Bestäm den inre cirkels radie. (Ledning: Börja med att bestämma två punkter som är spegelpunkter för både $|z| = 1$ och $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$).
3. Visa att $f_n(z) = e^{-nz}$ konvergerar likformigt mot 0 i $\operatorname{Re} z \geq \delta$ för varje $\delta > 0$. Är konvergensen likformig i $\operatorname{Re} z > 0$?
4. Undersök följande komplexa serier med avseende på konvergens och absolut konvergens.

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2i}\right)^n, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + i^n}, \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^n.$$

5. Bestäm för $0 < r < 1$ summan av de reella serierna

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta, \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta.$$

(Ledning: Betrakta den geometriska serien med $z = r e^{i\theta}$ och $0 < |z| < 1$).

6. Antag att den komplexa serien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ är konvergent. Visa att då är potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ absolut konvergent för $|z| < 1$.
7. Utveckla funktionen $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ i potensserier av formen a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-i)^n$ och bestäm seriernas konvergensradier.