

Demonstrationsuppgifter i Analytiska funktioner till den 12.10.2006

1. Visa att Cauchy-Riemanns differentialekvationer i polära koordinater antar formen

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad .$$

(Antag att $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ är analytisk och sätt $x = r \cos \theta$ och $y = r \sin \theta$).

2. Laplace's operator ∇ definieras genom

$$\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Visa att om f är analytisk, så är $\nabla |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2$.

3. Antag att f är deriverbar i ett område G och att $f'(z) = \alpha f(z)$ för varje $z \in G$, där α är en konstant. Visa att $f(z) = c e^{\alpha z}$, där c är en konstant.
4. Antag att f är analytisk i området M . Visa att om $|f(z)|$ är konstant i M , så är f konstant i M .
5. Låt M vara ett område. Antag att $f(z)$ och $\overline{f(z)}$ är analytiska i M . Visa att f är konstant i M .
6. En analytisk funktion är av formen $f(z) = u(x) + iv(y)$, där u och v är reella funktioner och $z = x + iy$. Bestäm f som funktion av z .
7. För vilka värden på z antar e^z värdena 2 och $1 + 2i$?
8. a) Sök en analytisk funktion $w = f(z)$, som avbildar parallellstrimlan $|x + y| < 1$ konformt på övre halvplanet $\text{Im } w > 0$. ($z = x + iy$)
b) Bestäm bilden av rektangeln med hörnpunkterna 1, $1 + i\pi$, $-1 + i\pi$ och -1 i z -planet, under avbildningen $w = e^z$.
9. Sök bilden av $z = 0$ under den Möbiustransformation, som överför i , ∞ och 1 på 0, 1 respektive $-i$.
10. Visa att avbildningen $T(z) = \bar{z}$ inte är en Möbiustransformation.
11. Visa att transformationen

$$w = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| \neq 1,$$

avbildar cirkeln $|z| = 1$ på cirkeln $|w| = 1$. Vad är bilden av det inre av enhetscirkeln ?

12. Visa att avbildningen

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}$$

överför högra halvplanet, dvs. området $\text{Re } z > 0$, på det inre av enhetscirkeln.