

Demonstrationsuppgifter i Analytiska funktioner till den 5.10.2006

1. Bestäm med användning av definitionen på gränsvärde

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z^2 - z} + \frac{1}{z} \right).$$

2. Undersök följande gränsvärden:

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z},$

b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|},$

c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z|}.$

3. Undersök i vilka punkter av z -planet funktionen

$$f(z) = 2x^3y + 3x2y^2 - y^3 + 3ixy^2$$

är a) deriverbar, b) analytisk.

4. Visa att varje polynom av första graden $ax + by + c$ med reella koefficienter utgör den reella delen av en analytisk funktion $f(z)$. Bestäm denna som en funktion av z .

5. Undersök i vilka punkter funktionerna

a) $f(z) = |z|^2,$

b) $f(z) = z \operatorname{Re} z$

är deriverbara.

6. Funktionen $f = u + iv$ definieras på följande sätt:

$$f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}, \quad z \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Visa att funktionerna u och v har partiella derivator i origo, som satisfierar Cauchy-Riemanns ekvationer, och att funktionen f saknar derivata i origo.

7. Undersök, med hjälp av derivatans definition, i vilka punkter $f(z) = |z|^2$ är deriverbar.

8. a) Härled L'Hospital's regel: Om $f(z)$ och $g(z)$ är deriverbara i punkten z_0 där $f(z_0) = g(z_0) = 0$ och $g'(z_0) \neq 0$, så gäller

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

b) Bestäm $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1+z^6}{1+z^{10}}.$

9. Undersök i vilka punkter av z -planet funktionen $f(z) = 2x^3y + 3x^2y^2 - y^3 + i3xy^2$, $z = x + iy$, är a) deriverbar, b) analytisk.

10. Definiera funktionen f genom

$$f(z) = \frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + i(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad z \neq 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Visa att Cauchy-Riemanns differentialekvationer satisfieras i punkten $z = 0$ och att f saknar derivata i punkten.