

Demonstrationsuppgifter i Analytiska funktioner till den 28.9.2006

1. Lös ekvationen $2z + i\bar{z} - 1 = 0$ och angiv svaret i formen $a + ib$.

2. Beräkna

a) $(1 + i)^8$,

b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

3. Visa att

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1,$$

då a och b är komplexa tal med $|a| = 1$ eller $|b| = 1$.

4. Karakterisera geometriskt de punkter i det komplexa planet, som uppfyller relationen

a) $|z + i| = |z - i|$,

b) $|z - 1| + |z + 1| \leq 4$.

5. Låt $z_n = \frac{in+1}{n+i}$. Visa direkt med stöd av definitionen att $\lim_n z_n = i$.

6. Visa att $\lim_n z_n = z$ om och endast om $\lim_n |z_n| = |z|$ och $\lim_n (\arg z_n) = \arg z$.

7. Låt $z_n = x_n + iy_n$ och $z = x + iy$. Visa att $\lim_n z_n = z$ om och endast om $\lim_n x_n = x$ och $\lim_n y_n = y$.

8. Låt $A \subset C$. Visa att

a) $A^{00} = A^0$,

b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Av a) följer att A^0 är öppen och av b) att $\overline{A}$ sluten.

9. a) Visa att unionen av ett godtyckligt antal och snittet av ett ändligt antal öppna mängder är en öppen mängd.

b) Visa att snittet av ett godtyckligt antal och unionen av ett ändligt antal slutna mängder är en sluten mängd.

10. Undersök huruvida mängden $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ är öppen eller sluten i C .

11. a) Låt $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ och $z_0 = x_0 + iy_0$. Visa att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha + i\beta \iff \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = \alpha \quad \text{och} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = \beta \right).$$

b) Låt $z = x + iy$. Bestäm gränsvärdet för uttrycket $\frac{x}{x^2+3y} + ixy$, då $z \rightarrow 1 - i$.

12. Visa att om funktionen $f(z)$ är kontinuerlig i punkten z_0 så är även funktionen $\overline{f(z)}$ kontinuerlig i z_0 .

13. Antag att funktionen g är definierad i en mängd M_g och kontinuerlig i punkten $z_0 \in M_g$, och att f är definierad i en öppen mängd M_f och kontinuerlig i punkten $g(z_0) \in M_f$. Visa att den sammansatta funktionen $f(g(z))$ är kontinuerlig i punkten z_0 .