

Analys I

Räkneövning 7, 11.11.2014

1. Låt $\alpha > \beta > 0$ och antag att $f'(0) = 1$. Visa att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} = \alpha - \beta.$$

Observera att l'Hopitals regel inte kan användas. (Varför? Vilka antaganden skulle då krävas?)

2. Låt $a > b > 0$ vara reella tal och $n \geq 2$ ett heltal. Visa att

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{a-b}.$$

(Ledning: Visa att $f(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x-1}$ är strängt avtagande då $x \geq 1$ och bestäm sedan $f(1)$ och $f(a/b)$.)

3. Definiera

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) För vilka x existerar $f'(x)$?
- (b) För vilka x är $f'(x)$ kontinuerlig?

4. Definiera

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{om } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & \text{om } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (a) För vilka x är $f(x)$ kontinuerlig?
- (b) För vilka x existerar $f'(x)$?