

Analys I

Räkneövning 5, 13.10.2014

1. Låt f vara en strängt monoton funktion definierad på intervallet $[a, b]$. Visa att f kan ha högst ett nollställe på $[a, b]$. Utnyttja sedan detta för att visa att $f(x) = \sqrt{x} + x - x^2 - \frac{1}{2}$ har exakt ett nollställe på intervallet $[0, \frac{1}{2}]$.

2. Låt

$$M = \left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Bestäm, om de existerar, $\sup M$ och $\inf M$ samt avgör ifall dessa tillhör M .

3. Visa att funktionen

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

antar ett minsta och ett största värde på $[0, \infty)$.