

Analys I

Räkneövning 4, 6.10.2014

1. Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x (\sin x + \cos^2 x)}{x^2 + 1}.$$

2. Låt f vara en kontinuerlig funktion på $[0, 1]$ som uppfyller $-1 \leq f(x) \leq 1$ för alla $x \in [0, 1]$. Visa att det existerar ett $x_0 \in [0, 1]$ sådant att

$$(f(x_0))^2 = x_0.$$

(Ledning: Använd satsen om mellanliggande värden.)

3. *Fibonacci*-talen definieras enligt

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

där $F_1 = F_2 = 1$.

(a) Låt x_n beteckna förhållandet mellan två på varandra följande Fibonaccital, dvs $x_n = F_{n+1}/F_n$. Visa att denna talföljd uppfyller

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad x_1 = 1$$

för varje $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bestäm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (Ledning: Betrakta jämna och udda n skilt.)