

Analys I

Räkneövning 1, 8.9.2014

1. Visa att, för varje $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \sum_{k=1}^n k^3.$$

2. Avgör om följande utsagor är sanna eller falska:

- (a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : xy > 0 \vee x = 0$
- (b) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : xy > 0$
- (c) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$
- (d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$

3. För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller följande utsagor?

- (a) $\forall \varepsilon > 0 : x < \varepsilon$
- (b) $\forall \varepsilon > 0 : x > \frac{1}{\varepsilon}$
- (c) $\forall \varepsilon > 0 : 0 < |x| < \varepsilon$
- (d) $\forall \varepsilon > 0 : 0 < x^2 < 1 + \varepsilon$

4. Visa med induktion att $11^n - 6$ är delbart med 5 för varje $n \in \mathbb{N}$.

5. (Extra) Antag att $\sqrt{2}$ är irrationellt (visas i kompendiet, s. 32). Visa, genom att betrakta $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ och $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}}$, att ett irrationellt tal upphöjt i ett irrationellt tal kan vara rationellt.