

Analys I, Hemuppgifter 10, 3.12.2014

1. Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, där varje $a_n > 0$, är konvergent om och endast om $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ är konvergent.

2. För vilka värden på p är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)^p}{k}$$

konvergent?

3. Undersök konvergens hos följande serier. I a) undersök om den eventuella konvergens är absolut eller betingad.

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1) \ln(k+1)} & b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k^2 + 2k + 1)x^k}{2^k(k+1)^3} \\ c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+1)2^k(x+1)^k}{k+1} & d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \ln(k)2^k x^k}{3^k k^2}. \end{array}$$

4. Låt (a_n) vara en talföljd sådan att $a_n > 1$ för varje n . Antag att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolut konvergent. Visa att även serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ är absolut konvergent.

5. Låt $t \mapsto g(t)$ vara en kontinuerlig funktion sådan att för varje $t > 0$ gäller

$$0 \leq g(t) \leq \beta \int_0^t g(s) \, ds,$$

där $\beta \geq 0$. Visa att $g \equiv 0$.