Analys I, Hemuppgifter 9, 26.11.2014

1. Beräkna följande gränsvärden

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2}, \quad b)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n}{(n+k)^2}.$$

2. Antag, att $f(x) > 0$ för $x \in (0,1]$, f är kontinuerlig på $(0,1]$ samt att $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ existerar och är positivt. Visa att

$$\int_0^1 \ln f(x)\ dx$$

är konvergent.

3. Undersök konvergensen hos integralerna

$$a)\ \int_1^\infty \frac{\sin(x-1)}{\ln x}\ dx, \qquad b)\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\arctan x}\ dx.$$

4. Undersök konvergensen hos integralerna

$$a)\ \int_1^\infty x^{-x^{-1}}\ dx, \qquad b)\ \int_0^1 x^{-x^{-1}}\ dx.$$

5. Visa att $t \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(tx)|\ dx,\ t > 0$, är kontinuerlig och att

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(tx)|\ dx = 1.$$

6. Definiera funktionen arctan genom

$$\arctan x := \int_0^x (1+t^2)^{-1}\ dt$$

och bevisa med hjälp av denna definition att

$$\arctan x + \arctan y = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}) \ \text{ om } xy < 1.$$