

Analys I, Hemuppgifter 7, 12.11.2014

1. Sätt $f(x) = x^n \sin(x^{-1})$, för $x \neq 0$ och $f(0) = 0$, där $n = 0, 1, 2, \dots$. Är f deriverbar i 0? Motivera!

2. Visa att

$$\pi x(1-x) \leq \sin(\pi x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

3. Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I sådant att för något $p > 1$ gäller för varje $x_1, x_2 \in I$ att

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^p.$$

Visa att f är konstant.

4. Antag att f'' existerar i en punkt $x_0 \in (a, b)$. Visa att

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

5. Låt f vara en kontinuerlig funktion på (a, b) och deriverbar på $(a, b) \setminus \{x_0\}$, där x_0 är en given punkt i (a, b) . Visa att om $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) =: L$ existerar, så är f även deriverbar i x_0 och $f'(x_0) = L$.

6. Funktionen f är deriverbar med växande derivata i $\mathbb{R}_+$. Visa att om f är kontinuerlig i 0 och $f(0) = 0$, så är funktionen $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ växande i $\mathbb{R}_+$.